

**Università degli Studi di Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2018/2019**  
**Esame di Geometria**  
**Prova scritta 25 Giugno 2019.**

- (i) Chi sostiene la sola prima parte risolverá gli esercizi 1), 2), 3) in due ore.
- (ii) Chi sostiene la sola seconda parte risolverá gli esercizi 4), 5), 6), 7), 8), 9) in due ore.
- (iii) Chi sostiene l'integrazione di Calcolo risolverá gli esercizi 7), 8), 9) in un'ora.
- (iv) Chi sostiene l'intero esame risolverá gli esercizi 1), 3), 5), 6), 7), 8), 9) in tre ore.

**Esercizio 1.** Si consideri per ogni  $k \in \mathbf{R}$  l'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  data da

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3 + kx_4, x_1 + x_3, kx_1 + x_2 + kx_4)$$

- (i) Si individuino i valori di  $k \in \mathbf{R}$  per cui  $f$  non é suriettiva.
  - (ii) Posto  $k = -1$  si individui una base per  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$  e si individui un'equazione per  $\text{Im } f$ .
- Esercizio 2.** In  $\mathbf{R}^4$  si considerino i vettori  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$   $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$   $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0)$  e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \quad W := \{\mathbf{v} = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid w = z - x = 0\}.$$

- (i) Si determini una base di  $V$  e di  $W$ .
- (ii) Si calcoli la dimensione di  $V \cap W$  e di  $V + W$ .

**Esercizio 3.** Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definito ponendo  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 8x - 2y + 2z \\ -2x + 5y + 4z \\ 2x + 4y + 5z \end{pmatrix}$ .

- (i) Si determini una base  $\mathcal{A}$  di autovettori di  $\mathbf{R}^3$ , rispetto a  $f$ .
- (ii) Si determinino le matrici del cambiamento di base  $M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(\text{Id})$ ,  $M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\text{Id})$ , essendo  $\mathcal{E}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .

**Esercizio 4.** Sia  $C$  la conica di equazione:

$$2xy - x - 3y = k$$

- (i) Stabilire per quali valori di  $k \in \mathbf{R}$  la conica  $C$  é degenera.
- (ii) Posto  $k = 0$  classificare la conica e ridurla in forma canonica.

**Esercizio 5.** Determinare la retta passante per il punto  $P = (1, -1, 1)$  e perpendicolare al piano di equazioni parametriche

$$x = 1 - s + t, y = s - t, z = t$$

**Esercizio 6.** Calcolare l'apparato di Frénet ( $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ , torsione e curvatura) in  $t = 0$  della seguente curva:

$$\gamma(t) = (t^3 - 1, t, t^2 + 1)$$

**Esercizio 7.** Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + y = x$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

**Esercizio 8.** Individuare i punti critici e classificarne il tipo per la seguente funzione:

$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y - y^2 - 10x^2 - 5$$

**Esercizio 9.** Calcolare l'integrale della funzione:  $f(x, y) = \frac{2x}{1+y^2}$  nel dominio

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq \tan(x)\}$$