Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2018/2019
Esame di Geometria
Prova scritta 25 Giugno 2019.

(i) Chi sostiene la sola prima parte risolverá gli esercizi 1), 2), 3) in due ore.
(ii) Chi sostiene la sola seconda parte risolverá gli esercizi 4), 5), 6), 7), 8), 9) in due ore.
(iii) Chi sostiene l'integrazione di Calcolo risolverá gli esercizi 7), 8), 9) in un'ora.
(iv) Chi sostiene l'intero esame risolverá gli esercizi 1), 3), 5), 6), 7) , 8), 9) in tre ore.

Esercizio 1. Si consideri per ogni $k \in \mathbf{R}$ l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ data da

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + kx_3 - x_4, x_1 + (k+1)x_2 + 2x_3 + x_4)$$

(i) Si individuino i valori di $k \in \mathbf{R}$ per cui f non é suriettiva.
(ii) Posto $k = 1$ si individui una base per Ker$f$ e Imf e si individui un'equazione per Imf.

Esercizio 2. In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$ $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$ $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, -1))$ e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \qquad W := \left\{ \mathbf{v} = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 | w + x = z = 0 \right\}.$$

(i) Si determini una base di V e di W.
(ii) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definito ponendo $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ x+z \end{pmatrix}$.

(i) Si determini una base $\mathcal{A}$ di autovettori di $\mathbf{R}^3$ rispetto a f.
(ii) Si determinino le matrici del cambiamento di base $M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(\mathrm{Id}), M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$, essendo $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 4. Si stabilisca al variare di $k \in \mathbf{R}$ se la conica C di equazione $x^2 + 2xy + (1+k)y^2 + 2x = 0$ é degenere e di che tipo é. Ridurla a forma canonica per $k = 0$.

Esercizio 5. Determinare l' equazione del piano in $\mathbf{R}^3$ che contiene la retta r di equazione cartesiana $x = z, y + z = 2$ e la retta s di equazione parametrica $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1 + t$.

Esercizio 6. Calcolare l'apparato di Frénet ($\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$, torsione e curvatura) in $t = 0$ della seguente curva in $\mathbf{R}^3$:

$$\gamma(t) = (tcost, 1 + tsent, t))$$

Esercizio 7. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 2y' + y = x + 1$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Esercizio 8. Individuare i punti critici e classificarne il tipo per la seguente funzione:

$$f(x, y) = (xy - 1)(x - y)$$

Esercizio 9. Calcolare l'integrale della funzione: $f(x, y) = x$ sul dominio D che é il quarto di corona circolare di centro l' origine e raggi 1 e 2 contenuta nel primo quadrante.