Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2018/2019
Esame di Geometria
Prova scritta 12 Gennaio 2020.

(i) Chi sostiene la sola prima parte risolverá gli esercizi 1), 2), 3) in due ore.
(ii) Chi sostiene la sola seconda parte risolverá gli esercizi 4), 5), 6), 7), 8), 9) in due ore.
(iii) Chi sostiene l'integrazione di Calcolo risolverá gli esercizi 7), 8), 9) in un'ora.
(iv) Chi sostiene l'intero esame risolverá gli esercizi 1), 3), 5), 6), 7) , 8), 9) in tre ore.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare al variare di $t \in \mathbf{R}$ dimensione del nucleo e dell'immagine di f
(ii) Calcolare una base del nucleo e dell'immagine di f per $t = 0$.
(iii) Calcolare per $t = 0$ un'equazione per l'immagine di f e stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $(1, 2k, 3k)$ é nell'immagine di f.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$ $\mathbf{v}_3 = (0, -1, 1, 1)$ e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3); \qquad W := \{(x, y, z, w) | z - w = y + z = 0\}.$$

(i) Si determini una base di V e di W.
(ii) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.
(iii) Si indichi una base per $V + W$ e per $V \cap W$

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definito ponendo $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 3y + z \\ 4z \end{pmatrix}$.

(i) Si determini una base $\mathcal{A}$ di autovettori di $\mathbf{R}^3$ rispetto a f.
(ii) Si determinino le matrici del cambiamento di base $M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(\mathrm{Id}), M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$, essendo $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 4. Si classifichie la conica C di equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$ e la si riduca a forma canonica.

Esercizio 5. Determinare l' equazione della retta in $\mathbf{R}^3$ che passa per il punto $(1, 1, 1)$ perpendicolare ai piani di equazioni $x + y + z - 1 = 0$ e $x - y + 12 = 0$.

Esercizio 6. Calcolare l'apparato di Frénet ($\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$, torsione e curvatura) in $t = 0$ della seguente curva in $\mathbf{R}^3$:

$$\gamma(t) = (t + cost, t + sent, t))$$

Esercizio 7. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = yx^2$$

con condizione iniziale $y(0) = 1$.

Esercizio 8. Individuare i punti critici e classificarne il tipo per la seguente funzione:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy + x$$

Esercizio 9. Calcolare l'integrale della funzione: $f(x, y) = e^y$ sul dominio $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2 \quad lnx \leq y \leq 2\}$.