Geometria Differenziale 2017/18
Esercizi I

1 Esercizi sulle curve piane

1.1 Esercizio

Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Stabilire per quali valori di t la parametrizzazione è regolare.

b) Sia Γ la traccia di α. Descrivere Γ con un'equazione in x e y (eliminare il parametro t).

c) Parametrizzare, se possibile, la traccia di α in modo regolare.

1.2 Esercizio

Studiare la curva (spirale logaritmica)

$$\alpha : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

determinando la curvatura e la lunghezza dell'arco corrispondente all'intervallo $[0, 2\pi]$.

1.3 Esercizio

Verificare la regolarita' della curva :

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

a) Descrivere la traccia Γ con un equazione cartesiana.

b) Determinare i valori di t per i quali il versore tangente è parallelo all'asse x. Dopo aver osservato che la traccia è contenuta in un quadrato di lato unitario, determinare i punti in cui la traccia di α è tangente ai lati di tale quadrato.

c) Determinare i valori di t per i quali $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In ciascuno di essi, determinare il versore tangente e il versore normale di α.

1.4 Esercizio

Sia Γ il ramo dell'iperbole
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$
che giace nel semipiano $x > 0$. Dopo aver parametrizzato Γ in modo regolare, determinare il valore massimo e minimo della sua curvatura, e gli eventuali punti dove tali estremi sono raggiunti (per il segno, si assuma che la curva sia percorsa nel verso delle y crescenti).

1.5 Esercizio

Ripetere l'esercizio precedente per l'ellisse in forma canonica $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, percorsa in senso antioriario (si assuma $a \geq b > 0$).

1.6 Esercizio

Ripetere l'esercizio precedente per la parabola in forma canonica $y^2 = 2px$, percorsa nel verso delle y crescenti (si assuma $p > 0$).

1.7 Esercizio

Supponiamo noto che $\alpha : [0, \infty) \to \mathbf{R}^2$ sia una curva piana, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, tale che:
$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare l'equazione cartesiana della traccia di α, supponendo che la curvatura sia costante, pari a 2, per ogni valore di s.

b) Determinare l'equazione cartesiana se, invece, la curvatura vale -2 per ogni valore di s.

1.8 Esercizio

Si consideri il polinomio:
$$f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 4x - 4y.$$

a) Per quali valori di c l'insieme di livello $f(x, y) = c$ è una curva regolare ?

b) Dopo aver verificato che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce una curva regolare Γ, determinare l'equazione della retta tangente a Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.9 Esercizio

Si studi la curva data dal grafico $y = \cosh x$; in particolare, calcolare la lunghezza dell'arco di curva corrispondente all'intervallo $x \in [-1, 1]$, e calcolarne la curvatura.

1.10 Esercizio

Si consideri la curva Γ, grafico della funzione $y = f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$. Determinare formule per le seguenti funzioni :

a) Lunghezza $L(x)$ della parte di grafico di f sull'intervallo $[a, x]$, con $x \leq b$.

b) Curvatura $k(x)$ di Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, assumendo che Γ sia percorsa nel verso delle x crescenti.

c) Supponiamo ora che la funzione $k(x)$ sia tale che

$$k(x) = \frac{2}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Che tipo di curva è Γ ?

1.11 Esercizio

Si consideri la curva Γ, grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x} \cos(x^2)$ sull'intervallo $(0, \infty)$. Si noti che Γ è contenuta nella striscia di piano compresa tra le curve $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$; in particolare, quando $x \to \infty$ la curva Γ "tende" asintoticamente all'asse x. Dimostrare che, pero', la curvatura di Γ non tende a zero, determinando esplicitamente una successione di punti $\{x_n\}$ tale che:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} |k(x_n)| = +\infty,$$

dove $k(x)$ indica la curvatura di Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

1.12 Esercizio

Ricordiamo che, data una curva parametrizzata $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, e dato un diffeomorfismo $\phi : [c, d] \to [a, b]$, la curva $\beta = \alpha \circ \phi : [c, d] \to \mathbf{R}^2$ è detta una *riparametrizzazione di* α, che sarà detta *diretta* se conserva il verso di percorrenza (cioè $\phi'(t) > 0$ per ogni t), e *inversa* se lo inverte (cioè $\phi'(t) < 0$ per ogni t).

Con k_α indicheremo la curvatura di α, quindi:

$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Dimostrare che, se $\beta = \alpha \circ \phi$ è una riparametrizzazione diretta di α, allora:

$$k_\beta(t) = k_\alpha(\phi(t)), \quad \text{per ogni } t \in [c, d].$$

Se la riparametrizzazione è inversa si avra' ovviamente

$$k_\beta(t) = -k_\alpha(\phi(t)), \quad \text{per ogni } t \in [c, d].$$

1.13 Esercizio.

Determinare l'unica curva $\alpha : (0, \infty) \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_\alpha(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}.$$

1.14 Esercizio.

Studiare la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

Determinare la lunghezza dell'arco corrispondente all'intervallo $(2\pi, 4\pi)$, la funzione ascissa curvilinea e la curvatura.

1.15 Esercizio

Dati numeri reali a, b, c, a', b', c' si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a + bt + ct^2 \\ a' + b't + c't^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Esistono valori dei parametri per i quali la traccia di α è una retta ?

1.16 Esercizio

Dare un'idea della traccia dell'unica curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_\alpha(s) = 2s \quad \text{per ogni} \quad s \in \mathbf{R}.$$

Se $\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ determinare i seguenti limiti:

$$\lim_{s \to +\infty} x(s), \lim_{s \to +\infty} y(s).$$

1.17 Esercizio

Sia $\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Si fissi un vettore $v \in \mathbf{R}^2$ e si consideri l'angolo $\theta(s)$ tra il versore tangente $T(s)$ e v. Dimostrare che

$$\theta'(s) = k(s).$$

1.18 Esercizio

Interpretare geometricamente le seguenti matrici ortogonali.

a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.19 Esercizio

Si consideri la curva piana:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

a) Trovare i punti dove la parametrizzazione è regolare, e determinare l'equazione della retta tangente in $t = \pi/4$.

b) Calcolare la lunghezza dell'arco da $t = 0$ a $t = 2\pi$.

c) Determinare il versore tangente $T(t) = \dfrac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha'(t)$, ove esiste, e calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to 0_+} T(t), \quad \lim_{t\to 0_-} T(t).$$

d) Determinare la curvatura $k(t)$ nei punti regolari, e calcolare $\lim_{t\to 0_+} k(t)$.

1.20 Esercizio

È data la curva in coordinate polari:

$$r = a + \cos\theta, \quad a \geq 1$$

parametrizzata, come al solito, dall'angolo θ:

$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Stabilire per quali valori di a la curva α è regolare.

b) Dopo aver verificato che α è chiusa, determinare la sua lunghezza quando $a = 1$.

c) Determinare la curvatura nel punto $\alpha(\theta)$ per ogni θ; stabilire per quali valori di a la curvatura non cambia di segno (cioè, è sempre positiva, o sempre negativa).

1.21 Esercizio

a) Data la curva piana $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t)\cos t \\ \sin(2t)\sin t \end{pmatrix}$, stabilire i valori di t per i quali α è regolare; per tali valori, determinare la curvatura di α.

b) È vero che α è iniettiva ? Disegnare la traccia di α.

c) Calcolare $r(t)$, la distanza di $\alpha(t)$ dall'origine.

1.22 Esercizio

Data la curva $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e dato un numero $r > 0$, si consideri la curva $\beta_r : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ definita da:

$$\beta_r(s) = \alpha(s) + rN(s),$$

dove $N(s) = J\alpha'(s)$ è il versore normale di α.

a) Per quali valori di r la curva β_r è regolare in s ?

b) Per tali valori, calcolare la curvatura di β_r.

c) Se α parametrizza la circonferenza di raggio R, qual è la traccia di β_r ?

d) In generale, come si interpreta geometricamente la traccia di β_r ?

1.23 Esercizio

Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ una curva regolare del piano parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un'isometria diretta del piano. Sia $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ la curva ottenuta componendo α con f, ovvero la curva definita da $\beta(s) = f(\alpha(s))$ per ogni $s \in [0, L]$. Se $k_\alpha(s), k_\beta(s)$ sono, rispettivamente, la curvatura di α in s e la curvatura di β in s, dimostrare che si ha $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$ per ogni s.

1.24 Esercizio

a) Si consideri la curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$. Dato $b > 0$, calcolarne la lunghezza L_b nell'intervallo $t \in [0, b]$ e stabilire se $\lim_{b\to\infty} L_b$ esiste oppure no.

b) Si consideri la curva piana $\alpha(t) = (3 - \cos t, 2 + 2\sin t)$ nell'intervallo $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare la curvatura $k(t)$ in funzione del parametro t, e determinare i punti dove essa assume valore assoluto massimo (risp. minimo).