Esercizi di Analisi Matematica II

Ingegneria Ambiente e Risorse — Ingegneria Ambiente e Territorio — Ingegneria Civile — Ingegneria Edile

Marco Spadini

Edizione n. 20130205 del 7 febbraio 2013

Indice

Capitolo 1

Serie

1.1 Serie numeriche

Esercizio svolto: Studiare il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \sin(n\pi + n/2)}{n! + 3n}.$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$\left| \frac{e^n \sin(n\pi + n/2)}{n! + 3n} \right| \leq \frac{e^n}{n! + 3n} \leq \frac{e^n}{n!}.$$

Dunque, per il teorema sulla convergenza assoluta e per il criterio del confronto, se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}. \tag{A}$$

converge, allora convergerà anche quella in esame. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie (A). Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0.$$

Dunque la serie (A) converge. Per quanto detto sopra anche la serie in esame converge.

Esercizio svolto: Studiare il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]^3.$$

Svolgimento. Applichiamo il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha $1/\sqrt{n} \to 0$ Allora, usando lo sviluppo di McLaurin di $\arctan(x)$, si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]^3}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1.$$

Dunque la serie in esame ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Quest'ultima serie converge per il criterio del confronto con gli integrali impropri. Infatti,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \, dx = 2 < +\infty.$$

Ne segue che la serie in esame è convergente.

Esercizio svolto: Studiare il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{n! + 2^n}.$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + 1}{n! + 2^n} = 1.$$

In particolare esso <u>non</u> è zero. Quindi la serie non può convergere. Dunque, essendo una serie a termini non negativi, necessariamente diverge.

Esercizio svolto: Studiare il carattere della seguente serie numerica e calcolarne la somma.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$\frac{1}{n^2 + n} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}.$$

Posto $a_n = \frac{n-1}{n}$, si ha

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{N+1} - a_1 = \frac{N}{N+1}.$$

Dunque la serie converge perchè $\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{2}$. Inoltre $S = \frac{1}{2}$.

Esercizio 1.1: Stabilire se le seguenti serie numeriche convergono

$$\sum_{n=12}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{3e^n + n} \qquad \sum_{n=12}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n}}{3e^{2n} + n^2}$$

[Soluzione: No.]

Esercizio 1.2: Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n-1} e^{-2n},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cos(2n)}{(n+2)!}.$$

Esercizio 1.3: Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \sin n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi + \pi/2)}{n}.$$

Esercizio 1.4: Mediante il criterio del confronto asintotico, stabilire il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Esercizio 1.5: Stabilire il carattere della seguente serie.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + ne^{-n})}{\sqrt{1+n^2}} \sin\left(\frac{n}{n^3 + 2n + 3}\right).$$

[Soluzione: Converge.]

Esercizio 1.6: Stabilire il carattere delle seguenti serie.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 \arctan(e^n)}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 \arctan(n)}.$$

[Soluzione: La prima diverge, la seconda converge.]

Esercizio 1.7: Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie numerica converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}{n \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^\alpha})}$$

Come cambia il risultato se si considera la serie numerica (a termini positivi) data da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}{n \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^\alpha})} \right|$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 1.8: Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la seguente serie numerica converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2 \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^\alpha})}$$

[Soluzione: Converge per $0 < \alpha < 1$ diverge per $\alpha \geq 1$.]

Esercizio 1.9: Si consideri, per $\alpha > 0$, la seguente successione $\{a_j^\alpha\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definita da

$$a_j^\alpha = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{-1}{n^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}.$$

Stabilire per quali valori di α si ha $a_j^\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare poi per quali, tra questi valori di α, si ha

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}^\alpha}{a_j^\alpha} < 1.$$

[Soluzione: $\alpha > 3/2$, tutti.]

Esercizio 1.10: Studiare il carattere della seguente serie numerica e calcolarne la somma.

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - n}.$$

[Soluzione: Converge, $S = -2/3$.]

Esercizio 1.11: Studiare, in dipendenza di $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie numerica e calcolarne la somma.

$$S_\alpha = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\alpha - 1 - \alpha}{n^2 - n} \alpha^n.$$

[Soluzione: Converge per $\alpha \in (0, 1]$ con $S_\alpha = -\alpha^2$; diverge per $\alpha > 1$.]

Esercizio 1.12: Studiare il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n} + (-1)^n n^2}{n^3 + n}.$$

Suggerimento. Scrivere la serie come la seguente somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n} + (-1)^n n^2}{n^3 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^3 + n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3 + n},$$

e mostrare che entrambe le serie addendo convergono.

[Soluzione: Converge.]

Esercizio 1.13: Studiare il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^5} + (-1)^n n^2}{n^3 + n}.$$

Suggerimento. Scrivere la serie come la seguente somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^5}+(-1)^n n^2}{n^3+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^5}}{n^3+n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+n},$$

e mostrare che le serie addendo sono, rispettivamente, divergente e convergente.

[Soluzione: Diverge.]

Esercizio 1.14: Studiare il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{5n}\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}+(-1)^n}{n}\right).$$

Suggerimento. Osservare che $(-1)^{5n}=(-1)^n$ *e poi adattare il suggerimento dell'esercizio 1.13.*

[Soluzione: Diverge.]

Esercizio 1.15: Studiare, in dipendenza dal parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^\alpha}+(-1)^{3n}\sqrt[3]{n^2}}{n^3}.$$

Suggerimento. Scrivere la serie come la seguente somma:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^\alpha}+(-1)^{3n}\sqrt[3]{n^2}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^\alpha}}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}\sqrt[3]{n^2}}{n^3},$$

e studiare il carattere delle serie addendo.

[Soluzione: Converge per $\alpha<4$, diverge per $\alpha\geq 4$.]

1.2 Serie di potenze

Esercizio svolto: Determinare l'insieme D di convergenza della seguente serie e trovarne la somma.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n(n+1)}$$

Svolgimento. Poniamo $t=\frac{-x^2}{3}$, la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$$

Il suo raggio di convergenza è 1, inoltre quest'ultima serie converge per $t=-1$ e diverge per $t=1$. In definitiva l'ultima serie converge per $t\in[-1,1)$. Quindi la serie assegnata converge per quei valori di x tali che

$$\frac{-x^2}{3}\in[-1,1)$$

cioè $0\leq x\leq\sqrt{3}$.

Per determinare la somma della serie poniamo, per $t\in[-1,1)$, $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$ e consideriamo

$$g(t):=tf(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Si ha, per $t\in(-1,1)$, $g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}$, dunque

$$f(t)=-\frac{\ln(1-t)}{t}\quad\text{per } t\neq 0$$

e $f(0)=1$. Infine,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n(n+1)}=f\left(\frac{-x^2}{3}\right)=\begin{cases}\frac{3\ln(1+\frac{x^2}{3})}{x^2} & \text{per } x\in(0,\sqrt{3}),\\ 1 & \text{per } x=0.\end{cases}$$

Esercizio svolto: Sia F_n la *successione di Fibonacci* definita per ricorrenza da

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\text{ per } n\geq 1.$$

(1) Determinare il raggio di convergenza r della serie $\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n$.
(2) Trovare una formula per la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n$ nel suo dominio di convergenza.
(3) Determinare l'insieme di convergenza.
Svolgimento. **(1)** Cerchiamo di calcolare il raggio di convergenza usando il limite

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n-1}}{F_n}\right|.$$

Poniamo, per $n\geq 1$, $\gamma_n=\frac{F_{n-1}}{F_n}$ (osserviamo che $F_n\neq 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$). Inoltre, visto che $F_n>F_{n-1}$, si osserva che $0<\gamma_n<1$. Cerchiamo di i punti di accumulazione per la successione $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}}=\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+\gamma_n.$$

Allora se γ_∞ è un punto di accumulazione, deve soddisfare $0<\gamma_\infty<1$ e l'equazione $\gamma_\infty^{-1}=1+\gamma_\infty$ cioè $\gamma_\infty^2+\gamma_\infty-1=0$. Le soluzioni di questa equazione sono due: $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$, ma l'unica di esse che è nell'intervallo $(0,1)$ è $\gamma_\infty=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. In definitiva, la successione limitata $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha un unico punto di accumulazione, dunque è convergente ed il suo limite vale γ_∞. Quindi il raggio di convergenza della serie data è $r=\gamma_\infty$.
(2) Se x è tale che $\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n$ converge, poniamo $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n$. Allora

$$xG(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}F_{n-1}x^n,$$

analogamente,

$$x^2G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n.$$

Dunque,

$$\begin{aligned} G(x) - xG(x) - x^2G(x) \\ &= F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})\, x^n \\ &= F_1 x = x, \end{aligned}$$

infatti $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$, per costruzione, quando $n \geq 2$. Ne segue che $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ è la formula cercata.

(3) Sappiamo già che l'insieme di convergenza è contenuto in $[-r, r]$ e contiene $(-r, r)$. Basta dunque verificare (o escludere) la convergenza per $x = \pm r$. Se la serie fosse convergente in $x = \pm r$ allora $G(\pm r)$ sarebbe finito ma così non è. Ne segue che il dominio cercato è $(-r, r)$.

Esercizio 1.16: Dati a, b positivi, sia L_n la successione definita per ricorrenza da

$$L_0 = a,\ L_1 = b,\ L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \text{ per } n \geq 1.$$

(Per $a = 2$ e $b = 1$ gli L_n sono detti *numeri di Lucas*.) Trovare una formula per la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n$ nel suo dominio di convergenza e determinare l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.17: Trovare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \ln(1/n)}{n \ln(n^2)} x^n.$$

[Soluzione: $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.]

Esercizio 1.18: Trovare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n n}}{\sqrt{n^3} + 3^n\ \sqrt{n}}\ x^n.$$

Esercizio 1.19: Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^{n-1}}{5n^2+3} t^n$$

Dedurne il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^{n-1}}{5n^2+3} (x-1)^n$$

nei punti $x = 1/2$, $x = 1$, $x = 3/2$.

Esercizio 1.20: Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-3)2^{n-1}}{5n} t^n$$

Dedurne il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-3)2^{n-1}}{5n} (x+1)^n$$

nei punti $x = -3/2$, $x = -1$, $x = -1/2$.

Esercizio 1.21: Data la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n^2}{(n^3+n)\log n} x^n,$$

determinarne l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.22: Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}\, 3^n\, t^n$$

Esercizio 1.23: Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin(2n\pi + 2)}{n^2 3^n} t^n.$$

Esercizio 1.24: Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}\ t^n.$$

Studiarne il carattere nei punti estremi dell'intervallo di convergenza.

Dedurre per quali valori di x converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}\ \left(x^2+2\right)^n$$

Esercizio 1.25: Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2 - \log n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n.$$

Suggerimento. Usare la sostituzione $t = \frac{x}{x-1}$.

Esercizio 1.26: Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n n^2}{n^2 + n \log n} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n.$$
Suggerimento. Usare la sostituzione $t = \frac{x}{x+1}$.

Esercizio 1.27: Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2} x^n.$$

Esercizio 1.28: Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(\log n)^2} x^n.$$

Esercizio 1.29: Determinare il dominio della seguente funzione:
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \sqrt{2^n}}{n+1} t^n,$$
ed usare il risultato per determinare per quali valori di x la funzione
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n \sqrt{2^n}}{n+1}$$
risulta definita.

Esercizio 1.30: Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sqrt{2n}}{\ln(n+1)} t^n,$$
ed usare il risultato per determinare per quali valori di x la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{-n} \sqrt{2n}}{\ln(n+1)}$$
converge.
Suggerimento. Usare la sostituzione $|x|^{-1} = 3t$.

Esercizio 1.31: Determinare il dominio della funzione f definita da:
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n(n+1)} \left(\sqrt{x} \right)^n.$$

Esercizio 1.32: Determinare il dominio (in $\mathbb{R}$) delle seguenti funzioni
$$h(x) := \sum_{n=12}^{\infty} \frac{2^n n}{3n^2 - n} (x^2 - 1)^n,$$
$$g(x) := \sum_{n=10}^{\infty} \frac{3^n n^3}{5n^2 + n} (|x| + 1)^n.$$

Esercizio 1.33: Trovare l'insieme di convergenza della seguente serie di potenze:
$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n n}}{1 + 2^n \sqrt{n}} x^n.$$

Esercizio 1.34: Determinare il dominio della seguente funzione:
$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n |x-y|^n \ln(x+y)}{2^{2n}(1+n)}.$$
Determinare poi i valori di f nei punti $(0,1)$, $(1,1)$ e $(2,1)$ se ivi definita.

Capitolo 2

Funzioni reali di due o più variabili reali

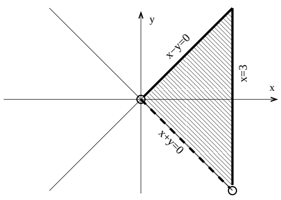
2.1 Dominio, continuità, derivate parziali e direzionali, differenziabilità, piano tangente, etc.

Esercizio svolto: Trovare e disegnare il dominio della seguente funzione:

$$g(x,y) = \sqrt{3x - x^2}\ \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x+y}}.$$

Svolgimento. Il Dominio è l'insieme dei punti (x,y) del piano tali che

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) \geq 0, \\ x+y > 0, \\ x(3-x) \geq 0. \end{cases}$$



Dominio di g.

Esercizio svolto: Dato $s \in \mathbb{R}$, studiare la continuità e limitatezza della seguente funzione

$$f_s(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ s & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Svolgimento. Osserviamo che $(x^2-y)^2 \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi $x^2 y \leq \frac{1}{2}(x^4+y^2)$. Allora f_s è limitata, infatti per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^4+y^2}{2(x^4+y^2)} \right| = \frac{1}{2},$$

e dunque $|f_s(x,y)| \leq \max\{1/2, |s|\}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Vediamo che s non può essere scelto in modo tale da rendere f_s continua. Infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

non esiste. Per verificare questa affermazione osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} f_s(x, mx) = 0 \qquad \text{per ogni } m \in \mathbb{R},$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} f_s(x, x^2) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio svolto: Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = xe^{(x-1)y} - x$.

Svolgimento. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (e^{(x-1)y} + xye^{(x-1)y} - 1\,,\ x(x-1)e^{(x-1)y}).$$

Risolviamo

$$\begin{cases} e^{(x-1)y} + xye^{(x-1)y} - 1 = 0 \\ x(x-1)e^{(x-1)y} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che deve essere $x = 0$ oppure $x = 1$. Sostituendo $x = 0$ nella prima equazione si ottiene $y = 0$. La stessa cosa si ottiene sostituendo $x = 1$. Abbiamo quindi due punti critici: $(0,0)$ e $(1,0)$.

Esercizio svolto: Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = xy - x^2 + y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Stabilire in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è parallelo al piano tangente al grafico di f in $(x,y,f(x,y))$.

Svolgimento. Il grafico G di f è l'insieme

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy - x^2 + y\}.$$

Quindi possiamo scrivere G come con l'insieme di livello zero della funzione $g(x,y,z) = z - xy + x^2 - y$. Allora il vettore $\nabla g(x,y,z)$ è ortogonale al piano tangente a G nel punto $(x,y,z) = (z,y,f(x,y))$. In definitiva, basta richiedere che il sia nullo il prodotto scalare $\langle \nabla g(x,y,z), v \rangle$. Si ha

$$0 = \langle v, \nabla g(x,y,z) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x - y + 1.$$

I punti cercati sono allora tutti quelli per cui $y = 2x + 1$.

Esercizio svolto: Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = xy - x^2 + y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Stabilire in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale al piano tangente al grafico di f in $(x, y, f(x,y))$.
Svolgimento. Procedendo come nell'esercizio precedente si vede che basta richiedere che v sia parallelo a $\nabla g(x,y,z)$. Questo si ottiene, per esempio, imponendo che

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2x-y \\ 0 & -x-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} < 2$$

o, equivalentemente, che il prodotto vettoriale $v \times \nabla g(x,y,z) = 0$. Da una qualunque di queste due condizioni segue che non esistono punti con la proprietà richiesta.

Esercizio 2.1: Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(x-y)x}}{\sqrt{(x+y)y}}$$

e calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico nel punto corrispondente a $(x,y) = (1,2)$.

Esercizio 2.2: Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{|xy| - 1}$$

e calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico nel punto corrispondente a $(x,y) = (1,2)$.

Esercizio 2.3: Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \ln(|xy| - |x|)$$

e calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico nel punto corrispondente a $(x,y) = (2,2)$.

Esercizio 2.4: Trovare e disegnare il dominio della seguente funzione:

$$g(x,y) = \sqrt{x(x-y)}$$

e determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}$, per $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, nel punto corrispondente a $(x,y) = (1, \alpha)$ risulta uguale a $\sqrt{2}$.

Esercizio 2.5: Considerare la funzione:

$$f(x,y) = x^2 y + y^3 e^x.$$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico nel punto di coordinate $(0, 1, f(0,1))$, e calcolare la derivata direzionale di f in $(0,1)$ nella direzione $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Esercizio 2.6: Determinare il dominio ed i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{xy - 2x}{x + 3y};$$

non è richiesto lo studio della natura locale dei punti critici determinati.
Scrivere inoltre l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(0,-2)$ e $(1,-1)$.

Esercizio 2.7: Determinare il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = xe^{xy} + y \sin x + 1$$

nel punto di coordinate (0,0,1).

Esercizio 2.8: Calcolare le derivate prime della seguente funzione

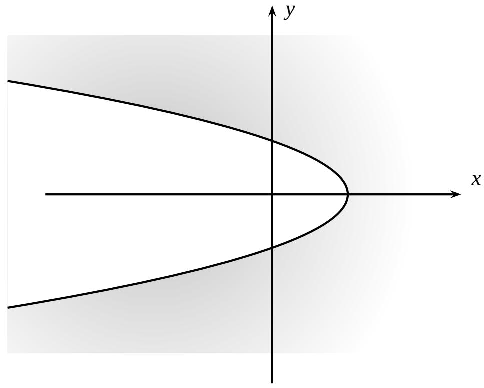
$$f(x,y,z) = \frac{xe^{-y}}{1 + x^2 + y^2} + ye^x z$$

nei punti di coordinate $(0,0,1)$ e $(1,0,0)$

Esercizio 2.9: Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione di più variabili e rappresentarlo graficamente

$$f(x,y) = \sqrt{\log(2y^2 + x)}$$

[Soluzione: L'insieme di definizione è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2y^2 - 1\}$. Graficamente:



il dominio è la parte ombreggiata del piano esterna alla parabola inclusa.]

Esercizio 2.10: Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione di due variabili e rappresentarlo graficamente

$$f(x,y) = \sqrt[4]{2 - (x-1)^2 - (y-1)^2} \ \ln(2y - x).$$

Esercizio 2.11: Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione di più variabili e rappresentarlo graficamente

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1 + e^{x+y}}}{\sqrt{y^2 - x^2 + 1}}$$

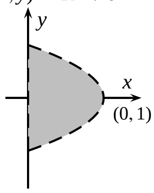
Esercizio 2.12: Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione di più variabili e rappresentarlo graficamente

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{2y^2 + 1/x}}$$

Esercizio 2.13: Trovare l'insieme di definizione della seguente funzione di più variabili e rappresentarlo graficamente

$$f(x,y) = \frac{\ln x}{\sqrt[4]{-\ln(2y^2+x)}}$$

[Soluzione: L'insieme di definizione è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2y^2 - 1\}$. Graficamente:



il dominio è la parte ombreggiata del piano escluse le curve tratteggiate. .]

Esercizio 2.14: Determinare il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = xe^{xy} + y\cos x - 1$$

nel punto di coordinate (0,0,-1).

Esercizio 2.15: Calcolare le derivate prime della seguente funzione

$$f(x,y,z) = \frac{3x}{1+y^2} + y^2e^z - z^2$$

nei punti di coordinate $(0,0,1)$ e $(1,0,0)$

Esercizio 2.16: Calcolare le derivate prime della seguente funzione

$$f(x,y,z) = 3x^2y^2 + y^2z - z^2$$

nei punti di coordinate $(0,0,1)$ e $(1,0,0)$

Esercizio 2.17: Determinare il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = xe^{xy} + y\sin x + 1$$

nel punto di coordinate (0,0,1).

Esercizio 2.18: Stabilire se la seguente funzione è continua

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+3y^2)\ln\sqrt{x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 2.19: Stabilire se la seguente funzione è continua

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^2+y^2)\ln\sqrt{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[Soluzione: Si.]

Esercizio 2.20: Determinare il dominio delle seguenti funzioni e disegnarlo

$$f(x,y) = \frac{\ln(2^x - y)}{\sqrt{y^2 - x^2}} \qquad g(x,y) = \frac{\ln(2^y - x)}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Scrivere poi l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,3,0)$ e di g nel punto $(3,2,0)$. Determinare e disegnare, inoltre, il dominio di

$$h(x,y) = \frac{\ln(2^x - y) + \sqrt{-x}}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

Esercizio 2.21: Si consideri la funzione

$$g(x,y) = 2x^2 - y^2 - 4x$$

e si determini l'insieme di livello $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = -2\}$. Calcolare il piano tangente al grafico di g in ogni $(\xi,\eta) \in C$. Determinare, infine, se esiste, per quale dei punti appena considerati il piano tangente è parallelo al piano xy.

Esercizio 2.22: Disegnare il dominio della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{y + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Esercizio 2.23: Trovare e disegnare il dominio della seguente funzione:

$$g(x,y) = \sqrt{x(x-y)}$$

e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico nel punto corrispondente a $(x,y) = (1,0)$.

Esercizio 2.24: Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(x-y)x}}{\sqrt{(x+y)y}}$$

e calcolare, se esiste, il piano tangente al grafico nel punto corrispondente a $(x,y) = (1,2)$.

Esercizio 2.25: Calcolare il gradiente della seguente funzione

$$f(x,y) = \int_0^{xy^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

nel punto $(1,3)$ e calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di f in quel punto.

Esercizio 2.26: Si consideri la funzione $f(x,y) = \sin(xy)$. Determinare l'insieme dei punti critici di f e darne una rappresentazione grafica almeno parziale.

Esercizio 2.27: La temperatura $T(x,y)$ nei punti del piano xy è data da $T(x,y) = x^2 - 2y^2$.
• Disegnare alcune linee di livello di T (isoterme).
• In quale direzione dovrebbe muoversi una formica che si trova nella posizione $(2,-1)$ se desidera raggiungere il fresco più velocemente possibile?

Esercizio 2.28: Consideriamo la funzione $f(x,y)$ che vale $\min\{(x-1)(y-1),(x+1)(y+1)\}$. Dire per quali punti f è differenziabile, e per quali è derivabile. Per quali f punti è continua?

[Soluzione: f è continua per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è differenziabile nel piano $\mathbb{R}^2$ privato della bisettrice del secondo e quarto quadrante..]

2.2 Limiti

Esercizio svolto: Calcolare (se esiste) il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$$

Svolgimento. Osserviamo che $(x^2-y)^2 \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi $x^2y \leq \frac{1}{2}(x^4+y^2)$. Si ha che

$$\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = |x|\left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{|x|}{2}.$$

Ne segue che il limite esiste e vale 0.

Esercizio svolto: Data la funzione $f(x,y) = \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$, studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Svolgimento. Consideriamo il limite della la restrizione di f alla parabola di equazione $y = x^2$, si ha $f(x,x^2) = \frac{|x|}{x}\sqrt{1+x^2}$ e $\lim_{x\to 0} f(x,x^2)$ non esiste. Di conseguenza, il limite cercato non può esistere.

Si osservi che considerando il limite della restrizione di f ad una qualsiasi retta passante per l'origine (che non sia $y = 0$ sulla quale la funzione non è definita) si ha che questo vale zero. Infatti, nel caso della retta $x = 0$ si ha $f(0,y) \equiv 0$; mentre per ogni retta della forma $y = mx$, $m \neq 0$, si ha $f(x,mx) = \frac{|x|}{m}\sqrt{1+m^2}$. Ne segue che

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0, \text{ per } m \neq 0.$$

Esercizio svolto: Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3y-3x}{x^4-y^2}$$

Svolgimento. La funzione della quale vogliamo calcolare il limite è continua in un intorno del punto $(1,0)$ essendo combinazione di funzioni continue. Pertanto, usando il fatto che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se f è continua in x_0,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3y-3x}{x^4-y^2} = -3.$$

Esercizio svolto: Data $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Svolgimento. Scriviamo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ per $\rho > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Posto

$$h(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho(\cos\theta)^2\sin\theta.$$

Si ha che $\lim_{\rho\to 0} h(\rho,\theta) = 0$ uniformemente rispetto a θ (perché $(\cos\theta)^2\sin\theta$ è una funzione limitata di θ). Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Esercizio 2.29: Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2ye^{x+y}}{x^2+y^2}\right)$$

[Soluzione: 1.]

Esercizio 2.30: Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{xy^2e^{2x+y^2}}{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

[Soluzione: −1.]

Esercizio 2.31: Studiare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+3y^3-3x^2-3y^2}{x^2+y^2}.$$

[Soluzione: −3.]

Esercizio 2.32: Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{x+y}}{2x^2+y^2-2y+1}$$

Esercizio 2.33: Studiare i limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2-2x+y)(y+1)}{x^2+y^2-2x+1}$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-2x+y)(y+1)}{x^2+y^2-2x+1}$$

Esercizio 2.34: Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sin(x+y))^2}{x^2+3y^2}$$

Esercizio 2.35: Studiare il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4y)}{x^6+|y^3|}$$

[Soluzione: Il limite non esiste.]

Esercizio 2.36: Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{\alpha+\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\right),$$

e calcolarlo quando possibile.

2.3 Estremi locali ed assoluti, insiemi di livello

Esercizio svolto: Disegnare alcune linee di livello ed il grafico della seguente funzione:

$$f(x,y) = |x-y| + |x+y|.$$

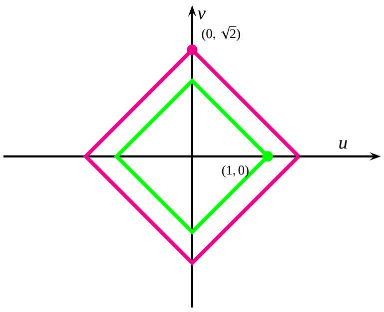
Svolgimento. Per semplificare il problema consideriamo il cambiamento di coordinate

$$u = x - y, \qquad v = x + y.$$

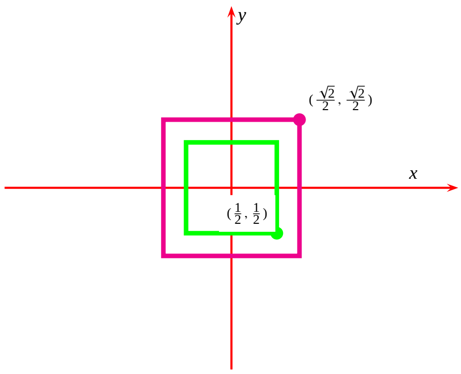
L'inverso di tale cambiamento è dato da

$$x = \frac{v+u}{2}, \qquad y = \frac{v-u}{2}.$$

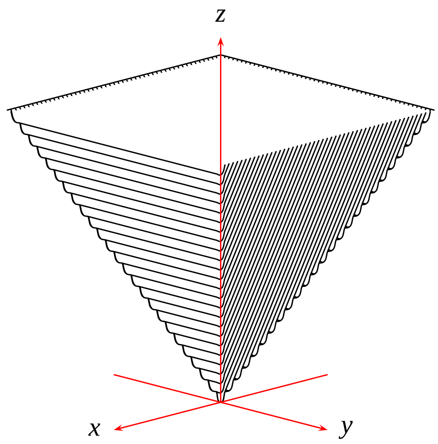
Poniamo $h(u,v) := f\left(\frac{v+u}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = |u| + |v|$. Disegnamo, nel piano uv, le linea di livello di $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : h(u,v) = 1\}$ (in verde) e $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : h(u,v) = \sqrt{2}\}$ (magenta).



Nel piano xy, dunque, le corrispondenti linee di livello sono:



Così abbiamo ottenuto anche le linee di livello nel piano xy. Si capisce subito come è fatto il grafico della funzione f:



Esercizio svolto: Data la funzione $f(x,y) = xy - y$ determinare l'immagine mediante f degli insiemi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\},$$
$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1/2, |y| \le 1/2\}.$$

Svolgimento. Osserviamo che gli insiemi D e Q sono connessi, limitati e chiusi e che la funzione f è continua; quindi $f(D)$ ed $f(Q)$ sono intervalli limitati e chiusi. Cerchiamo eventuali punti critici interni ai domini D e Q. Poiché

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-1 \end{pmatrix}$$

l'unico punto critico è $(1,0)$ che non è interno a D o a Q; quindi è sufficiente cercare l'immagine della frontiera di D e di Q.

Determiniamo $f(\partial Q)$. In ∂Q non vi sono punti (x,y) tali che $\nabla f(x,y) \perp \partial Q$. Allora gli estremi di f su Q vanno cercati soltanto tra i vertici $(-1/2,-1/2)$, $(-1/2,1/2)$, $(1/2,1/2)$ e $(1/2,-1/2)$ del quadrato Q (questi infatti sono punti in cui ∂Q non può essere rappresentata come curva regolare). Poiché

$$f(-1/2,-1/2) = 3/4, \qquad f(-1/2,1/2) = -3/4,$$
$$f(1/2,1/2) = -1/4, \qquad f(1/2,-1/2) = 1/4,$$

si ha $f(Q) = [-3/4, 3/4]$.

Determiniamo $f(\partial D)$. Cerchiamo i punti di ∂D in cui $\nabla f \perp \partial D$. Dato $(x,y) \in \partial D$ si ha $x^2 + y^2 = 4$; se $v = (v_1, v_2)$ è un vettore perpendicolare a ∂D in (x,y) deve essere $v_1 = \lambda x$ e $v_2 = \lambda y$ per $\lambda \in \mathbb{R}$ opportuno, quindi i punti $(x,y) \in \partial D$ in cui $\nabla f(x,y) \perp \partial D$ sono quelli per cui esiste λ tale che

$$\begin{cases} y = \lambda x, \\ x - 1 = \lambda y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ricavano i punti $(1,0)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Poiché

$$f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad f(1,0) = 0,$$

si ha $f(D) = [-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$.

Esercizio svolto: Determinare Le curve di livello della funzione

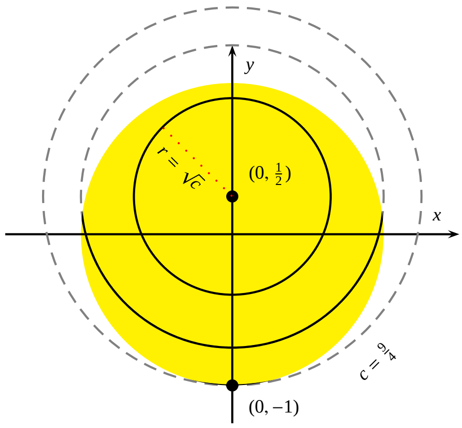
$$f(x,y) = x^2 + (y - \frac{1}{2})^2$$

ed usarle per determinare l'immagine $F(D)$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento. Dato un arbitrario numero reale c, l'insieme di livello

$$l_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$$

si trova risolvendo l'equazione $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = c$. Pertanto $l_c = \emptyset$ se $c < 0$, $l_0 = \{(0, \frac{1}{2})\}$ mentre, se $c > 0$, l_c è la circonferenza di raggio $r = \sqrt{c}$ centrata in $(0, \frac{1}{2})$.



Le curve di livello nell'insieme D (in giallo)

L'insieme D è connesso, limitato e chiuso, e la funzione f è continua. Pertanto $f(D)$ è un intervallo limitato e chiuso. Osserviamo che $f(x,y) \geq 0$; tale valore è raggiunto da f in $(0, \frac{1}{2})$. La curva di livello più alto che incontra D è la circonferenza di centro $(0, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{3}{2}$, cioè $l_{\frac{9}{4}}$. Quindi $f(D) = [0, \frac{9}{4}]$.

Esercizio svolto: Determinare l'immagine della funzione $f(x,y) = \frac{\sqrt{6}}{2}xy - y^2$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} \leq 1\}.$$

Svolgimento. Osserviamo che l'insieme D è connesso, limitato e chiuso e che la funzione f è continua; quindi $f(D)$ è un intervallo limitato e chiuso.

Si ha

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2}y \\ \frac{\sqrt{6}}{2}x - 2y \end{pmatrix}$$

Dunque l'unico punto critico è $(0,0)$ che è interno a D.

Calcoliamo $f(\partial D)$. Parametrizziamo ∂D ponendo $x(\theta) = 2\cos\theta$ e $y(\theta) = \sqrt{6}\sin\theta$ per $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi $f(\partial D)$ coincide con l'immagine della funzione

$$g(\theta) = 6\cos\theta\sin\theta - 6(\sin\theta)^2$$

definita in $[0, 2\pi]$. Per trovare quest'immagine, calcoliamo

$$\begin{aligned} g'(\theta) =& 6((\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2) - 12\sin\theta\cos\theta \\ =& 6\cos(2\theta) - 6\sin(2\theta). \end{aligned}$$

Per $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha che $g'(\theta) = 0$ se e solo se $2\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$, cioè se $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$. Con un (bel) po' di calcoli si vede che

$$\begin{aligned} g(0) = g(2\pi) &= 0, \\ g(\frac{\pi}{8}) = g(\frac{9\pi}{8}) &= 3(\sqrt{2} - 1) \\ g(\frac{13\pi}{8}) &= 3(1 + \sqrt{2}) \\ g(\frac{5\pi}{8}) &= -3(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} f(\partial D) =& g([0, 2\pi]) \\ =& [-3(1 + \sqrt{2}), 3(\sqrt{2} + 1)]. \end{aligned}$$

Dal momento che $f(0,0) = 0$, otteniamo

$$f(D) = [-3(1 + \sqrt{2}), 3(\sqrt{2} - 1)].$$

Esercizio svolto: Calcolare l'insieme dei valori assunti dalla funzione

$$f(x,y) = x - 2y$$

nell'unione del triangolo T e del segmento S specificati come segue:

$$\begin{aligned} T =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1, y \geq 0\} \\ S =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 4, y = 0\} \end{aligned}$$

Svolgimento. Gli insiemi T ed S sono compatti e connessi. Quindi $f(T)$ ed $f(S)$ sono intervalli limitati e chiusi. Dobbiamo calcolare $f(T \cup S) = f(T) \cup f(S)$.

Calcoliamo l'immagine del triangolo T. Osserviamo che il gradiente della funzione f non è mai perpendicolare ai segmenti che costituiscono la frontiera di T, dunque i valori estremi di $f|_T$ vanno cercati tra quelli assunti sui vertici del triangolo. Si ottiene $f(T) = [-2, 1]$. Similmente si ottiene $f(S) = [3, 4]$.

Dunque $f(T \cup S) = [-2, 1] \cup [3, 4]$.

Esercizio svolto: Determinare il valore dei parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$f_{\lambda,\mu}(x, y) = \lambda x^2 - \mu y^2 - 4x + \lambda y$$

abbia un punto critico in $(-1, 3)$. Determinare poi la natura locale di tale punto critico.
Svolgimento. Si ha

$$\nabla f_{\lambda,\mu}(x, y) = (2\lambda x - 4, -2\mu y + \lambda)$$

Poiché deve essere $\nabla f_{\lambda,\mu}(-1, 3) = (0, 0)$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2\lambda - 4 = 0 \\ -6\mu + \lambda = 0 \end{cases}$$

da cui segue $\lambda = -2$, $\mu = -\frac{1}{3}$. La matrice hessiana della funzione $f_{-2,-\frac{1}{3}}$ nel punto $(-1, 3)$ è

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $(-1, 3)$ è un punto di sella.

Esercizio svolto: Determinare l'immagine della seguente funzione

$$f(x, y) = \min\{(x - 1)(y - 1), (x + 1)(y + 1)\}$$

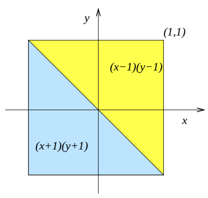
definita sul quadrato Q (pieno!) avente vertici in $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ e lati paralleli agli assi.
Svolgimento. La funzione f è continua e il suo dominio è limitato e chiuso. Pertanto l'immagine di f è un intervallo limitato e chiuso in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che su ∂Q la funzione vale identicamente 0. Inoltre, risolvendo

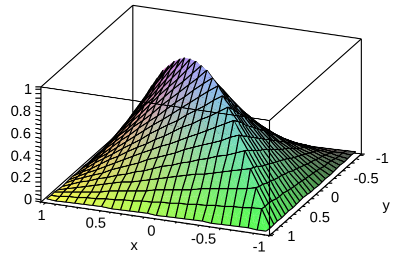
$$(x + 1)(y + 1) \le (x - 1)(y - 1)$$

si ottiene che $f(x, y)$ è dato da

$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) & \text{se } x \le -y \\ (x - 1)(y - 1) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



È sufficiente, pertanto valutare le funzioni $(x, y) \mapsto (x + 1)(y + 1)$ e $(x, y) \mapsto (x - 1)(y - 1)$ rispettivamente sui triangoli T_1 e T_2 di vertici $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, e $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$. Si ottiene subito che non ci sono punti critici di queste funzioni nei rispettivi domini. Studiando le loro restrizioni alla frontiera di T_1 e T_2 si vede che il massimo di queste due funzioni è raggiunto in $(0, 0)$ e vale 1. Il minimo invece è raggiunto sulla frontiera del quadrato Q ed è uguale a 0. Da queste considerazioni segue che $f(Q) = [0, 1]$.



La figura sopra rappresenta il grafico di f.

Esercizio svolto: Trovare i punti critici della seguente funzione

$$f(x, y, z) = e^{xy} - z^2$$

e determinarne la natura locale.
Svolgimento. Il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y, z) = (ye^{xy},\ xe^{xy},\ -2z),$$

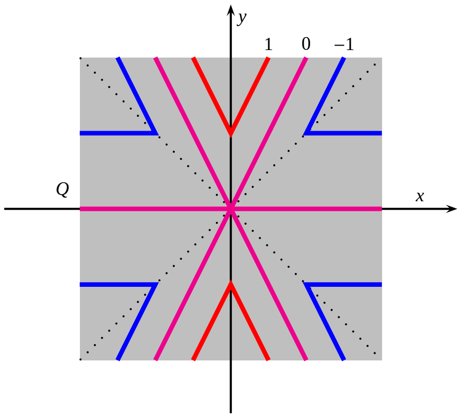
pertanto l'unico punto critico è l'origine $O = (0, 0, 0)$. Per determinare la natura locale di O consideriamo la restrizione h di f al piano xy. Se proviamo che $h(x, y) = f(x, y, 0)$ ha in $(0, 0)$ un punto di sella allora anche f avrà una sella in O. Osserviamo che $h(x, y) = e^{xy}$ può essere pensato come la composizione della funzione $(x, y) \mapsto xy$ con la funzione $t \mapsto e^t$ che è monotona. Allora il comportamento in $(0, 0)$ di h è lo stesso di $(x, y) \mapsto xy$; cioè $(0, 0)$ è punto di sella per h.

Esercizio 2.37: Disegnare gli insiemi di livello, corrispondenti a 1, 0 e -1, della funzione

$$f(x, y) = \big||x| - |y|\big| - |x|,$$

Definita nel quadrato Q centrato nell'origine, con i lati paralleli agli assi ed un vertice in $(2, 2)$.

[Soluzione: Le linee di livello corrispondenti a $f(x, y) = 1$, $f(x, y) = 0$ e $f(x, y) = -1$:



sono disegnate rispettivamente in rosso, magenta e blu.]

Esercizio 2.38: Calcolare l'immagine mediante la funzione $f(x,y) = xy + \frac{y^2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$ dell'arco dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ giacente nel primo quadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

[Soluzione: $[-\sqrt{3}, \sqrt{6}]$.]

Esercizio 2.39: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = \big|y - |x|\big|$$

definita nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$

Esercizio 2.40: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = \Big|\big||x| - 5\big| - |x|\Big| + y^2$$

definita nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

[Soluzione: $[3,6]$.]

Esercizio 2.41: Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x,y) = \big|xy^2 - x^2|y|\big|$$

definita sul triangolo (pieno) triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$.

Suggerimento. sfruttare le proprietà di simmetria del dominio ed il fatto che $f(x,y) = f(x,-y)$.

Esercizio 2.42: Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (xy-1)(x-y)$$

e stabilirne la natura locale.

Esercizio 2.43: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = 3x + \frac{y}{2}$$

definita nell'intersezione del semipiano $x \geq 0$ e dei seguenti due dischi:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y \leq 4\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 4\}.$$

[Soluzione: $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 6]$.]

Esercizio 2.44: Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x,y) = (|x| + \sqrt{5-x^2})|y| - y^2$$

al cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 5$.

[Soluzione: $[0, \frac{5}{2}]$.]

Esercizio 2.45: Calcolare l'insieme dei valori assunti dalla funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2$$

nel triangolo $T = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1, y \geq 0\}$.

Esercizio 2.46: Calcolare l'insieme dei valori assunti dalla funzione

$$f(x,y) = x - 2y$$

nel quadrato $Q = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$.

Esercizio 2.47: Determinare l'immagine della funzione $f(x,y) = \big||x| - |y|\big|$ definita nell'insieme $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$.

[Soluzione: $[0,1]$.]

Esercizio 2.48: Determinare l'immagine della funzione $f(x,y) = x - 3y$ definita nell'insieme

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\left\{|x|, |y|, \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}, \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\right\} \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2.49: Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}$$

definita nel triangolo (pieno) di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(-1,0)$.

Esercizio 2.50: Data la funzione

$$g(x,y,z) = x - y + z$$

Determinare l'immagine mediante g del cubo (pieno) con gli spigoli paralleli agli assi coordinati avente un vertice in $(0,0,0)$ ed un altro in $(1,1,1)$.

Suggerimento. pensare al significato geometrico del gradiente.

Esercizio 2.51: Dato

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1\},$$

Determinare l'immagine di D mediante la funzione

$$f(x,y) = e^{-(x^2y-x^2-y^3)}.$$

(Suggerimento. La funzione $t \mapsto e^{-t}$ è monotona.)

Esercizio 2.52: Determinare i punti critici della seguente funzione:

$$f(x,y) = x^4 + 4x^2y - y^2 - 10x^2 - 5.$$

e la loro natura locale.

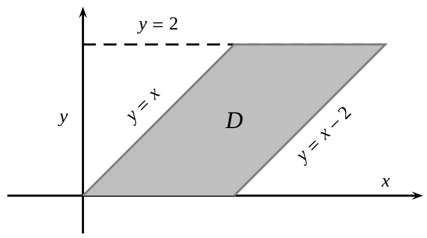
[Soluzione: $(0,0)$: massimo locale, $(1,2)$: sella, $(-1,2)$: sella.]

Esercizio 2.53: Determinare il massimo ed il minimo assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

nel dominio piano D dato da

$$D = \{(x,y) : \ 0 \le y \le 2, \ y \le x \le y+2\}.$$



Esercizio 2.54: Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2+xy+y}$$

definita nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, \ 0 \le y \le x+4\}.$$

(*Non è richiesto lo studio della natura locale dei punti critici*).

Esercizio 2.55: Determinare i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4 - \frac{x^2}{2} + 1}{y^2+1}$$

e stabilire la loro natura locale.

Suggerimento. Osservare che la funzione f è della forma $f(x,y) = g(x)h(y)$ per cui, ad esempio $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)h(y)$, ecc...

Esercizio 2.56: Determinare i punti critici seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{1+e^{(y^2+1)\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)}}$$

e stabilire, se possibile, la loro natura locale.

Suggerimento. Osservare che la funzione $\mathbb{R} \ni s \mapsto 1/(1+e^s) \in \mathbb{R}$ è monotona (Attenzione: crescente o decrescente?)

Esercizio 2.57: Determinare l'immagine della seguente funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}},$$

definita sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}.$$

Suggerimento. Osservare che la funzione $[0,+\infty) \ni s \mapsto \sqrt{s} \in [0,+\infty)$ è monotona crescente

Esercizio 2.58: Quale è l'immagine della funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = ye^{x^2+y},$$

dove l'insieme D è dato da:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \le 4\}$$

Esercizio 2.59: Stabilire la natura locale (se possibile) del punto critico $(1,-1)$ per la funzione $f(x,y) = \sin(xy - x + y^2)$.

Esercizio 2.60: Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

al bordo della corona circolare di raggio interno 1 e raggio esterno 4.

Esercizio 2.61: Determinare la natura locale dei punti critici delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = 2^{x^4+y^3-4x^2-3y^2}$$
$$g(x,y) = 2^{-(x^4+y^3-4x^2-3y^2)}$$

Suggerimento. Le funzioni $t \mapsto 2^t$ e $t \mapsto 2^{-t}$ sono monotone.

Esercizio 2.62: Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{|x|+|y|+1}$$

al bordo dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\}$$

Esercizio 2.63: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x,y) = [x^2 - 3xy + y^2]^3 + 2$$

definita sulla corona circolare di raggio interno 1/4 e raggio esterno 4.
Suggerimento. Osservare che la funzione $t \mapsto t^3 + 2$ *è monotona.*

Esercizio 2.64: Determinare (e disegnare) il dominio della funzione

$$f(x, y) = \log\left((y^2 - 4)(x^2/2 - x)\right)$$

e determinare la natura locale dei suoi punti critici interni al dominio.
Suggerimento. la funzione $t \mapsto \log t$ *è monotona.*

Esercizio 2.65: Determinare (e disegnare) il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(y^2/2 - y)(x^2 - 4)}}$$

e determinare la natura locale dei suoi punti critici interni al dominio.
Suggerimento. La funzione $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ *è monotona.*

Esercizio 2.66: Determinare il dominio della seguente funzione e la natura locale dei suoi punti critici interni al dominio

$$f(x, y) = \ln\left[(x^2 - 1)(3 - y^2)\right]$$

Suggerimento. La funzione $t \mapsto \ln t$ *è monotona.*

Esercizio 2.67: Determinare il dominio della seguente funzione e la natura locale dei suoi punti critici interni al dominio

$$f(x, y) = \sqrt{[(x^2 - 3)(1 - y^2)]}$$

Suggerimento. La funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ *è monotona.*

Esercizio 2.68: Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy^2 - x^2 y}{x^2 + y^2 + 1}$$

al bordo del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Esercizio 2.69: Determinare l'immagine della restrizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{y \sin(2x^2 + y - \pi)}{x^2 - 2y + \pi}$$

alla parabola di equazione $y = -2x^2 + \pi/2$.
Suggerimento. Fare attenzione al fatto che il dominio non è un insieme compatto.

Esercizio 2.70: Determinare l'immagine della seguente funzione:

$$f(x, y) = \int_0^{x - xy} s^2 \, ds$$

definita sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 4\}$.

Suggerimento. Usare la monotonia della funzione $t \mapsto \int_0^t s^2 \, ds$.

Esercizio 2.71: Determinare i punti critici della seguente funzione:

$$f(x, y) = e^{-(x^2 y - xy^2 - x + y)}$$

e stabilire, se possibile, la loro natura locale.
Suggerimento. Usare la monotonia della funzione $t \mapsto e^{-t}$.

Esercizio 2.72: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

definita sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \,,\; y \le 1 - x\}.$$

Esercizio 2.73: Calcolare l'insieme dei valori assunti dalla funzione

$$f(x, y) = x - 2y$$

nell'unione del triangolo T e del segmento S specificati come segue:

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1, y \ge 0\} \\ S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le x \le 4, y = 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 2.74: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x, y) = (x - y)^{13}$$

definita sul quadrato (pieno) avente vertici in $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ e lati paralleli agli assi.
Suggerimento. sfruttare la monotonia della funzione $t \mapsto t^{13}$

Esercizio 2.75: La temperatura in tutti i punti del disco $x^2 + y^2 \le 1$ è data da

$$T(x, y) = (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}$$

Determinare le temperature minima e massima sul disco.

Esercizio 2.76: Determinare l'immagine della funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

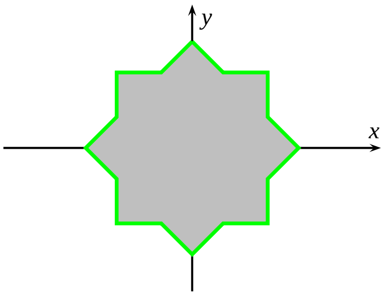
definita sull'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4 \,,\; y \le \sqrt{2}\right\}.$$

Esercizio 2.77: Determinare l'immagine della funzione $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ definita sulla frontiera dell'insieme

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \min\left\{\max\{|x|, |y|\},\; \max\left\{\frac{|x - y|}{\sqrt{2}}, \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}\right\}\right\} \le 1\right\}.$$

Suggerimento. Il dominio E è rappresentato in figura:



Tenere inoltre conto della monotonia della funzione $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ per $t \geq 0$.

Esercizio 2.78: Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$$

definita nella parte di piano D limitata dalla circonferenza centrata in $(1,0)$ e passante per l'origine. Determinare l'immagine di f.

Suggerimento. si vede subito che c'è un unico punto critico in $(1,0)$. Per studiare la restrizione di f alla frontiera ∂D, passiamo a coordinate polari. La frontiera si rappresenta con l'equazione $\rho = 2\cos\theta$, per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Trovare l'immagine di $f|_{\partial D}$ equivale a trovare l'immagine della funzione

$$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\cos\theta}{1+\rho^2}$$

con la condizione $\rho = 2\cos\theta$, e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ovvero $\rho \in [0,2]$. Allora, basta studiare la funzione

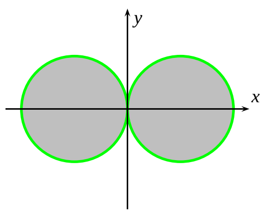
$$\rho \mapsto \frac{\rho^2/2}{1+\rho^2}, \qquad \rho \in [0,2].$$

[Soluzione: $f(D) = [0, \frac{2}{5}]$.]

Esercizio 2.79: Determinare l'immagine della funzione $f(x,y) = |x|x - y^2$ definita nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \min\{(x-1)^2 + y^2 \,,\, (x+1)^2 + y^2\} \leq 1\}.$$

Suggerimento. si osservi che è sufficiente studiare la funzione per $x \geq 0$. Il dominio D è rappresentato in figura.



Esercizio 2.80: Determinare l'immagine della funzione $f(x,y) = |x| - |xy|$ definita nell'insieme

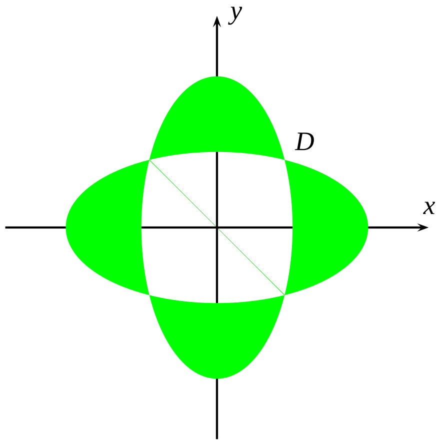
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}y\right|, xy \leq 0\right\}.$$

[Soluzione: $(-\infty, \frac{1}{2}]$.]

Esercizio 2.81: Determinare l'immagine della funzione $f(x,y) = |x| + 2|y|$ definita sull'insieme D degli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\min\left\{\frac{x^2}{4}+y^2, \frac{y^2}{4}+x^2\right\} \leq 1 \leq \max\left\{\frac{x^2}{4}+y^2, \frac{y^2}{4}+x^2\right\}$$

Suggerimento. Usare le linee di livello. L'insieme D è rappresentato graficamente da:



Esercizio 2.82: Determinare l'immagine mediante la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + 13$ dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \big|x - |y|\big| \leq 0\}.$$

Esercizio 2.83: Si consideri la funzione $f(x,y) = \arctan\left(x^2 + (y+1)^2\right)$ definita sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y^2| \leq y\}.$$

Determinare l'immagine di f. Come cambia il risultato se sostituiamo f con la funzione $g(x,y) = \frac{1}{x^2+(y+1)^2}$?

Esercizio 2.84: Determinare l'immagine mediante la funzione $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 2.85: Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \big||x|-1\big| + \big||y|-1\big| - 1$$

e sia, per ogni $c \in \mathbb{R}$,

$$L_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\right\}.$$

Determinare per quali c si ha $L_c = \emptyset$. Disegnare, se non vuoti, gli insiemi $L_{-1/2}$, L_0 e L_1. Trovare l'immagine mediante f del segmento di estremi $(0,-1)$ e $(2,2)$.

Esercizio 2.86: Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| = 2\}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x, y) = \frac{(x - y)}{\sin(|x + y|)}.$$

Determinare $f(D)$.

[Soluzione: $\mathbb{R}$.]

Esercizio 2.87: Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x, y) = \frac{(x + y)}{1 + \sqrt{xy})}.$$

Determinare $f(D)$.

[Soluzione: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.]

Esercizio 2.88: Data una matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 .$$

Calcolare l'immagine $f(S)$ dove

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Suggerimento: Applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla funzione

$$f(x, y) = \langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = \langle A^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$$

[Soluzione: L'immagine è $[\sigma_1, \sigma_2]$ con σ_1, σ_2 rispettivamente il più piccolo ed il più grande dei valori singolari di A (cioè gli autovalori di $A^T A$).]

Esercizio 2.89: Consideriamo il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ dato da:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < \frac{3}{4}\}$$

e la funzione ivi definita

$$f(x, y) = \frac{\sin(|x + y|)}{1 + |x + y|}.$$

Calcolare $f(D)$.

Suggerimento. Considerare la funzione $g(t) = \frac{\sin(t)}{1+t}$ *per* $t \in [0, 3/4)$ *e osservare che* $\cos(t) > \sin(t)$ *per* $t \in [0, \pi/4)$ *e, in particolare, per* $t \in [0, 3/4)$. *Si deduce che* g *è monotona crescente.*

[Soluzione: $[0, \frac{4\sin\left(\frac{3}{4}\right)}{7})$.]

Esercizio 2.90: Sia D il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato da

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le |x - y| \le 2, 1 \le |y| \le 2, |x| \le 2\right\}$$

e sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = x - 3y.$$

Determinare l'immagine $f(D)$.

[Soluzione: $f(D) = [-6, -3] \cup [3, 6]$.]

Esercizio 2.91: Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $|\lambda| = x^2 + y$ ammetta soluzioni nel dominio piano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| \le 4, |y - 1| \le 1\}.$$

Suggerimento. Determinare, per prima cosa, il massimo della funzione $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ *in* D *e poi osservare che* 0 *appartiene all'immagine di questa funzione.*

[Soluzione: $-38 \le \lambda \le 38$.]

Esercizio 2.92: Si consideri la sfera S di centro l'origine di $\mathbb{R}^3$ e raggio 1. Trovare i punti $P = (x, y, z) \in S$ tale che il piano tangente Π in P as S determina con i piani coordinati il tetraedro di volume minimo.

Suggerimento. Per motivi di simmetria è sufficiente considerare il caso $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. *Il volume del tetraedro è dato da* $\frac{1}{6xyz}$. *Si deve allora minimizzare questa funzione soggetta al vincolo* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *(cioè* $P \in S$*). Conviene, in effetti, massimizzare* $(x, y, z) \mapsto xyz$ *soggetta allo stesso vincolo.*

[Soluzione: Sono gli otto punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.]

Capitolo 3

Equazioni differenziali

3.1 Struttura delle soluzioni, integrale generale, analisi qualitativa

Esercizio svolto: Date le funzioni $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = e^t$, verificare che sono funzioni linearmente indipendenti, dopodiché scrivere un'equazione differenziale lineare (omogenea), di ordine più basso possibile, che sia soddisfatta da entrambe. Quale è l'integrale generale di tale equazione?

Svolgimento. Per verificare che x_1 e x_2 sono linearmente indipendenti consideriamo il determinante wronskiano

$$\mathbf{W}_{[x_1,x_2]}(t) = \det\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} = (t-1)e^t$$

che è diverso da 0 per ogni $t \neq 1$. Quindi le due funzioni sono linearmente indipendenti. Siccome sono date due funzioni linearmente indipendenti, avremo bisogno di uno spazio di soluzioni di dimensione almeno 2. Questo significa un'equazione di almeno secondo ordine. Cerchiamo l'equazione differenziale della forma

$$\ddot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\dot{x}(t)$$

dove A e B sono funzioni che determiniamo risolvendo per ogni t (rispetto ad $A(t)$ e $B(t)$) il seguente sistema, equivalente ad imporre che x_1 e x_2 siano soluzioni:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = A(t)x_1(t) + B(t)\dot{x}_1(t), \\ \ddot{x}_2(t) = A(t)x_2(t) + B(t)\dot{x}_2(t), \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 = tA(t) + B(t), \\ e^t = e^tA(t) + e^tB(t). \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è, naturalmente, $\mathbf{W}_{[x_1,x_2]}(t)$. Dunque è risolubile per ogni $t \neq 1$. Si ottiene

$$A(t) = -\frac{1}{t-1}, \quad B(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Allora l'equazione differenziale cercata è:

$$\ddot{x} = \frac{t}{t-1}\dot{x} - \frac{1}{t-1}x, \qquad (\star)$$

che, chiaramente, non è ben definita per $t = 1$. Possiamo anche scriverla in modo equivalente (se $t \neq 1$) come segue:

$$(t-1)\ddot{x} = t\dot{x} - x, \qquad (\star\star)$$

che non è in forma normale ma ha senso anche per $t = 1$. Per rispondere all'ultima domanda, descriviamo l'insieme delle soluzioni di $(\star)$ ed $(\star\star)$.

Le soluzioni della $(\star)$ sono le mappe con dominio $(-\infty, 1)$ della forma $t \mapsto \alpha t + \beta e^t$, e le mappe aventi dominio $(1, \infty)$ della forma $t \mapsto \gamma t + \delta e^t$ (ricordiamo che funzioni apparentemente uguali ma con dominio diverso sono da considerarsi distinte). È da notare che l'equazione $(\star)$ stessa non è definita per $t = 1$.

Le soluzioni della $(\star\star)$ sono invece tutte le funzioni della forma

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha t + \beta e^t & \text{per } t \leq 1 \\ \gamma t + \delta e^t & \text{per } t \geq 1 \end{cases}$$

con la condizione che $\alpha + \beta e = \gamma + \delta e$, che deriva dalla $(\star\star)$ quando $t = 1$. Notiamo che, con questa condizione, le funzioni di questa forma sono necessariamente C^1.

Esercizio svolto: Si consideri, per $t > 0$, l'equazione differenziale

$$t^2\ddot{x} + 5t\dot{x} + 4x = 0. \qquad (\bullet)$$

Se x è una soluzione, si trovi l'equazione differenziale soddisfatta dalla funzione $y(s) = x(e^s)$. Se ne trovino tutte le soluzioni e le si usino per determinare quelle dell'equazione data.

Svolgimento. Posto $t(s) = e^s$ e $s(t) = \ln(t)$ si ha $x(t) = y(s(t))$. Derivando due volte questa relazione (l'apice indica la derivata rispetto a s),

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)y'(s) = \frac{1}{t}y'(s),$$
$$\ddot{x}(s) = \frac{1}{t^2}y''(s) - \frac{1}{t^2}y'(s).$$

Sostituendo nell'equazione $(\bullet)$ si ottiene,

$$y''(s) + 4y'(s) + 4y(s) = 0. \qquad (\bullet\bullet)$$

Questa è un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti; applichiamo il metodo risolutivo. Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ ha la (unica) radice $\lambda = -2$ di molteplicità 2. Allora le funzioni $y_1(s) = e^{-2s}$ e $y_2(s) = se^{-2s}$ sono soluzioni linearmente indipendenti di (●●). Tutte le soluzioni di questa equazione, dunque, si scrivono come $\alpha e^{-2s} + \beta se^{-2s}$ per α e β opportuni. Le soluzioni della (●) si ottengono sostituendo $s = \ln(t)$ in questa formula. Quindi, la formula

$$\alpha t^{-2} + \beta t^{-2}\ln(t)$$

rappresenta tutte le soluzioni cercate al variare di α e β.

Esercizio svolto: Verificare che le funzioni $x_1(t) = e^{t^2}$ e $x_2(t) = e^{-t^2}$ sono soluzioni linearmente indipendenti della seguente equazione differenziale lineare omogenea per $t > 0$:

$$\ddot{x} - \frac{1}{t}\dot{x} - t^2 x = 0.$$

Usare questo fatto per trovare tutte le soluzioni della seguente equazione non omogenea:

$$\ddot{x} - \frac{1}{t}\dot{x} - t^2 x = 8t^3.$$

Svolgimento. Che le funzioni x_1 e x_2 siano soluzioni dell'equazione omogenea data è una vedifica diretta che lasciamo al lettore. Che esse siano funzioni linearmente indipendenti lo possiamo verificare calcolando il determinante wronskiano:

$$\mathbf{W}_{[x_1,x_2]}(t) = \det\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^{t^2} & e^{-t^2} \\ 2te^{t^2} & -2te^{-t^2}\end{pmatrix} = -4t$$

che è diverso da 0 nel dominio considerato ($t > 0$).

Per trovare tutte le soluzioni della equazione non omogenea dobbiamo ricavarne una soluzione particolare. Usiamo il metodo di variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{x}(t) = a(t)x_1(t) + b(t)x_2(t) = a(t)e^{t^2} + b(t)e^{-t^2},$$

dove a e b sono funzioni C^1 da determinare. Derivando otteniamo (omettiamo, per semplicità, la dipendenza esplicita di a e b da t),

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{a}e^{t^2} + \dot{b}e^{-t^2} + 2tae^{t^2} - 2tbe^{-t^2}.$$

Scegliamo di cercare la nostra soluzione particolare tra quelle per cui

$$\dot{a}e^{t^2} + \dot{b}e^{-t^2} = 0 \qquad (♣)$$

(ricordiamo che non ci interessa trovarle tutte ma solo una particolare). Ne segue che $\dot{\bar{x}}(t) = 2tae^{t^2} - 2tbe^{-t^2}$. Derivando, si ottiene

$$\ddot{\bar{x}}(t) = 2t\dot{a}e^{t^2} - 2t\dot{b}e^{-t^2} + a\left(2e^{t^2} + 4t^2e^{t^2}\right) - b\left(2e^{-t^2} - 4t^2e^{-t^2}\right).$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea e semplificando (si deve tenere conto che e^{t^2} ed e^{-t^2} sono soluzioni della non omogenea), si ottiene:

$$2t\dot{a}e^{t^2} - 2t\dot{b}e^{-t^2} = 8t^3. \qquad (♣♣)$$

Formiamo il sistema delle (♣) e (♣♣) (le incognite sono, per ogni t, $\dot{a}$ e $\dot{b}$):

$$\begin{cases} \dot{a}e^{t^2} + \dot{b}e^{-t^2} = 0, \\ 2t\dot{a}e^{t^2} - 2t\dot{b}e^{-t^2} = 8t^3. \end{cases}$$

Osserviamo che il determinante di questo sistema non è altro che $\mathbf{W}_{[x_1,x_2]}(t)$ che è diverso da 0 nel dominio considerato. Quindi il sistema è risolubile in modo unico. Otteniamo:

$$\dot{a}(t) = 2t, \qquad \dot{b}(t) = -2te^{t^2}.$$

Integrando, si ha $a(t) = t^2$ e $b(t) = -e^{t^2}$. Infine,

$$\bar{x}(t) = a(t)e^{t^2} + b(t)e^{-t^2} = t^2e^{t^2}.$$

Dunque, le soluzioni della equazione non omogenea data dono date da

$$\alpha e^{t^2} + \beta e^{-t^2} + t^2e^{t^2},$$

al variare di α e β.

Esercizio svolto: Si consideri l'equazione differenziale

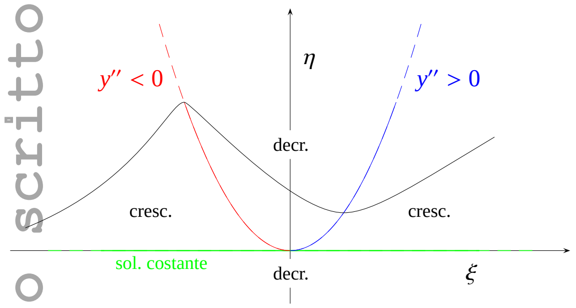
$$y'(x) = x^2y - y^2.$$

Trovare l'insieme dei punti $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ tali che la soluzione passante per (ξ, η) abbia un punto critico per $x = \xi$. Quali di questi punti è un massimo stretto (per la corrispondente soluzione)? Quali un minimo?

Svolgimento. Se $x \mapsto y(x)$ è una soluzione tale che $\eta = y(\xi)$ e ξ è un punto critico allora $0 = y'(\xi) = \xi^2\eta - \eta^2$. In altre parole, l'insieme cercato è:

$$C := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2\eta - \eta^2 = 0\}.$$

Chiaramente C è l'unione della retta $\eta = 0$ e della parabola $\eta = \xi^2$. Notiamo che $y(x) \equiv 0$, il cui grafico è la retta $\eta = 0$, è una soluzione. Quindi i punti di questa retta non sono di estremo stretto. *(Osservazione. Le soluzioni che passano per* *un qualunque punto del semipiano $\eta < 0$ sono ivi confinate. Infatti, in conseguenza del teorema di Cauchy, non possono attraversare la retta $\eta = 0$. Allora, visto che il loro grafico non incontra C, non possono avere punti estremi. Questo è confermato dallo studio del segno di y'. Difatti, per $\eta < 0$, si ha $y'(\xi) = \eta(\xi^2 - \eta) < 0$ che implica la stretta decrescenza delle soluzioni il cui grafico è contenuto nel semipiano $\eta < 0$.)*



Per stabilire quali di questi punti è un massimo possiamo procedere in due maniere: potremmo studiare il segno di y' in un intorno di questi punti, oppure calcolare la derivata seconda $y''(\xi)$ nei punti di C. Procediamo nel secondo modo. Dall'equazione differenziale otteniamo, derivando, che

$$y''(x) = 2xy(x) + x^2y'(x) - 2y(x)y'(x)$$

Siccome nei punti di C si ha $y'(\xi) = \xi^2\eta - \eta^2 = 0$, otteniamo $y''(\xi) = 2\xi\eta$ per $(\xi, \eta) \in C$. Allora, i punti di C per cui $\eta > 0$ si dividono in due insiemi: quelli per cui $\xi > 0$, nei quali $y''(\xi) > 0$ (quindi la corrispondente soluzione ha ivi un massimo), e quelli tali che $\xi < 0$ per cui la corrispondente soluzione ha ivi un minimo.

Esercizio svolto: Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x^2 - y^2. \qquad (\spadesuit)$$

Dato $m \in \mathbb{R}$ determinare l'insieme I_m dei punti $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ con la proprietà che, se y è una soluzione dell'equazione tale che $\eta = y(\xi)$, si ha che il grafico di y in (ξ, η) ha pendenza m (cioè la retta tangente al grafico in (ξ, η) ha coefficiente angolare m). *(Gli insiemi I_m sono detti **curve isocline**.* Determinare, in particolare I_0.

Svolgimento. Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto (ξ, η) non è altro che $y'(\xi)$. Dall'equazione $(\spadesuit)$ segue che se $(\xi, \eta) \in I_m$ allora $m = y'(\xi) = \xi^2 - \eta^2$ (ricordiamo che $y(\xi) = \eta$). Quindi

$$I_m = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 - \eta^2 = m\}.$$

In altre parole, gli insiemi I_m sono iperboli per $m \neq 0$. Per $m = 0$ la formula sopra descrive la coppia di rette di equazioni $\xi = \eta$ e $\xi = -\eta$.

Esercizio svolto: Si consideri l'equazione differenziale

$$(x^2 - 3y^2)y' + 2xy = 0. \qquad (\diamond)$$

Trovare una famiglia di funzioni che sono costanti sul grafico delle soluzioni di $(\diamond)$. Usare questa famiglia per trovare una formula implicita per le soluzioni stesse.

Svolgimento. Per prima cosa, associamo una forma differenziale ω all'equazione $(\diamond)$. Moltiplicando il membro sinistro per il differenziale $\mathrm{d}x$ e riconoscendo il differenziale $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$, si ottiene

$$\omega(x, y) := 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y.$$

In effetti, la $(\diamond)$, si può anche scrivere come $\omega(x, y) = 0$. Ora, se $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che $\mathrm{d}f(x, y) = \omega(x, y)$ (cioè una primitiva di ω), allora $f(x, y(x))$ è costante. Infatti, se y è una soluzione di $(\diamond)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x))y'(x) \\ &= 2xy + (x^2 - 3y^2)y' = 0.\end{aligned}$$

In pratica, abbiamo che ogni primitiva è una funzione con le proprietà richieste.

Osserviamo ora che ω è una forma esatta in $\mathbb{R}^2$. Le sue primitive, come si vede facilmente, possono essere scritte come $f_c(x, y) := yx^2 - y^3 + c$ al variare della costante arbitraria c. La famiglia $\{f_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ ha la proprietà cercata.

Per studiare le soluzioni osserviamo che se y è una soluzione, allora ognuna delle f_c deve essere costante sul grafico di y. In particolare, per una opportuna costante K, deve essere.

$$yx^2 - y^3 = K,$$

per ogni (x, y) sul grafico di una soluzione data. Questa è la formula implicita cercata.

Esercizio svolto: Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$2xy' + y = 0 \qquad x > 0.$$

Svolgimento. Possiamo procedere in tre modi: (1) per separazione di variabili; (2) cercare una formula implicita per le soluzioni; (3) usare la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine.

(1) Ovviamente $y(x) = 0$ è una soluzione della nostra equazione; allora, per il teorema di Cauchy nessuna altra soluzione può annullarsi. Per cercare le altre soluzioni possiamo dividere per y l'equazione. Siccome $x > 0$ per ipotesi, è possibile dividere anche per $2x$. Otteniamo

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{2x}.$$

Integrando entrambe i membri rispetto a x e usando la formula di cambiamento di variabile, si ha

$$\ln|y(x)| = -\frac{1}{2}\ln(x) + C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + C,$$

per C costante arbitraria (ricordiamo che $x > 0$). Prendendo l'esponenziale del primo e dell'ultimo membro si ottiene $|y(x)| = e^C\sqrt{x^{-1}}$. Da cui segue $y(x) = K\sqrt{x^{-1}}$ per K costante arbitraria.

(2) Associamo alla nostra equazione differenziale la forma $y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$. Sfortunatamente questa non è esatta tuttavia, moltiplicandola per y si ottiene la forma

$$\omega(x,y) := y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$$

che invece è esatta sull'intero $\mathbb{R}^2$. (*Il fattore 'y' usato è detto* ***fattore integrante*** *per la nostra equazione differenziale.*) Osserviamo che se f è una primitiva di ω allora f è costante sui punti del grafico di qualunque soluzione y. Infatti $\mathrm{d}f(x,y(x)) = y(x)(y(x)\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y(x)) = y(x)(2xy'(x)+y(x)) = 0$. Osserviamo che la funzione $(x,y) \mapsto xy^2$ è una primitiva di ω. Quindi, se y è una qualunque soluzione allora $x[y(x)]^2 = C$ per una opportuna costante C. Ne segue che $|y(x)| = C/\sqrt{x}$, che implica $y(x) = K\sqrt{x^{-1}}$ per K costante arbitraria.

(3) La formula risolutiva ci dà

$$y(x) = Ke^{\int \frac{\mathrm{d}x}{2x}} = Ke^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = K\sqrt{x^{-1}},$$

per K costante arbitraria.

Esercizio svolto: Data la famiglia $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_c\}_{c>0}$ di curve descritte implicitamente da

$$x^2 + y^2 + 2Cx = 0, \qquad x > 0,\ y > 0, \tag{$\heartsuit$}$$

scrivere un'equazione differenziale che descriva gli elementi di $\mathcal{G}$ (nel senso che il grafico di ogni sua soluzione soddisfi l'equazione data).

Svolgimento. Poniamo $f_c(x,y) = x^2+y^2+2Cx$. Se la $\gamma\colon x \mapsto (x,y(x))$ annulla $f_c(x,y(x))$, allora

$$0 = \nabla\phi_c(x,y)\cdot\gamma'(x) = 2y(x)y'(x) + 2x - C.$$

Questo ci conduce all'equazione

$$y' = -\frac{2x-2C}{2y},$$

che non è soddisfacente in quanto dipende da C. Per eliminare questa dipendenza, moltiplichiamo e dividiamo per x il secondo membro di questa equazione e sfruttiamo la ($\heartsuit$). si ottiene

$$-\frac{2x^2-2Cx}{2xy} = -\frac{x^2-y^2}{2xy}.$$

L'equazione cercata, allora è $y' = -\frac{x^2-y^2}{2xy}$.

Esercizio svolto: Data la famiglia $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_c\}_{c>0}$ di curve descritte implicitamente da

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = c, \qquad x > 0,\ y > 0,$$

trovare le curve che sono ortogonali a quelle di $\mathcal{F}$ in ogni punto del primo quadrante.

Svolgimento. Possiamo procedere seguendo due strade: **(1)** Ricavare un'equazione differenziale che descriva gli elementi di $\mathcal{F}$ e osservare che se $y' = f(x,y)$ è una tale equazione allora le curve ortogonali cercate sono descritte da $y' = -\frac{1}{f(x,y)}$. Infatti, se $(y-y_0) = m(x-x_0)$ è la retta tangente in (x_0,y_0) ad una curva $\mathcal{F}_c$, allora $(y-y_0) = -\frac{1}{m}(x-x_0)$ è la retta ortogonale per lo stesso punto. Per trovare le curve cercate risolviamo poi quest'ultima equazione. **(2)** Ricavare un'equazione differenziale per le curve cercate da considerazioni geometriche e risolverla.

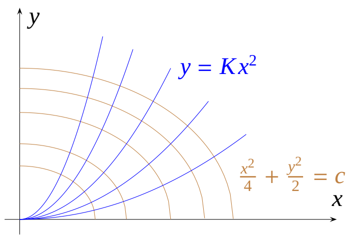
Risolviamo l'esercizio con il secondo dei metodi indicati. Poniamo

$$\phi_c(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - c.$$

Il vettore $\nabla\phi_c(x,y)$ è ortogonale alla curva $\mathcal{F}_c$. Se vogliamo una curva $\gamma\colon x \mapsto (x,y(x))$ che sia ortogonale ad ogni elemento di $\mathcal{F}$ in (x,y), allora $\gamma'(x) = \binom{1}{y'(x)}$ deve essere parallelo a $\nabla\phi_c(x,y)$. Possiamo prendere, per esempio,

$$y'(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi_c(x,y)}{\frac{\partial}{\partial y}\phi_c(x,y)} = \frac{y}{x/2}.$$

Possiamo risolvere questa equazione differenziale con il metodo di separazione delle variabili.



Otteniamo:

$$y = Kx^2,$$

per K costante arbitraria. Quindi le curve cercate sono archi di parabola passanti per l'origine.

Esercizio 3.1: Descrivere le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{y-x}{x+y} = 0, \qquad x > 0,$$

trovando una formula implicita che le rappresenti.

Suggerimento. L'equazione si può riscrivere come

$$y'(x) = \frac{\frac{y}{x} - 1}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Introduciamo la nuova incognita $v(x) = y(x)/x$. *L'equazione diventa*

$$xv'(x) = -\frac{1+v^2}{v+1}$$

che, separando le variabili, dà luogo alla relazione (ricordiamo che $x > 0$*)*

$$\frac{1}{2}\ln(1+v^2) + \arctan(v) + \ln(x) + C$$

per C *costante arbitraria. La relazione cercata si ottiene sostituendo* y/x *al posto di* v *e semplificando.*

[Soluzione: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C$.]

Esercizio 3.2: Data la famiglia di curve descritte implicitamente dalle equazioni

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = c, \quad x > 0,\ y > 0,$$

trovare le curve che sono ortogonali a quelle date in ogni punto del primo quadrante.

[Soluzione: $y = \frac{K}{\sqrt{x}}$, con K costante arbitraria.]

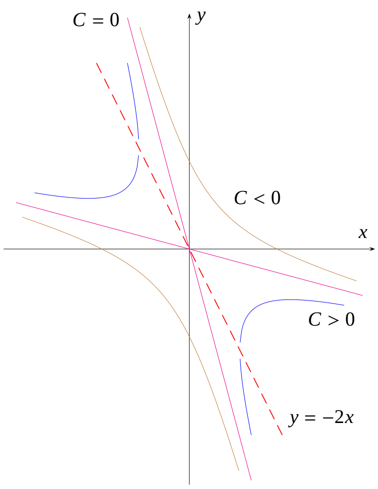
Esercizio 3.3: Descrivere le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{x+2y}{2x+y},$$

trovando una formula implicita che le rappresenti.

Suggerimento. Fare uso della forma differenziale $(x+2y)\,\mathrm{d}x + (2x+y)\,\mathrm{d}y$, *oppure dividere numeratore e denominatore del membro destro per* x *(per* $x \neq 0$*) ed introdurre la nuova incognita* $v(x) = y(x)/x$.

[Soluzione: Sono archi delle iperboli di equazione $\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} = C$ (si veda la figura)



La retta in rosso rappresenta i punti in cui l'equazione perde senso. Le soluzioni corrispondenti a $C > 0$ (in blu) e $C = 0$ (in magenta) non sono definite su tutto $\mathbb{R}$. I grafici delle soluzioni corrispondenti a $C = 0$ sono semirette. .]

Esercizio 3.4: Data la famiglia $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_c\}_{c>0}$ di curve descritte implicitamente da

$$x^2 + y^2 + 2Cx = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$$

endequation scrivere un'equazione differenziale che descriva la famiglia di curve ortogonali agli elementi di $\mathcal{G}$.

[Soluzione: $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.]

Esercizio 3.5: Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = x + 2y^2.$$

Dato $m \in \mathbb{R}$ determinare l'insieme I_m dei punti $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ con la proprietà che, se y è una soluzione dell'equazione tale che $\eta = y(\xi)$, si ha che il grafico di y in (ξ,η) ha pendenza m (cioè la retta tangente al grafico in (ξ,η) ha coefficiente angolare m). Si determini poi la natura locale dei punti di I_0 per le corrispondenti soluzioni dell'equazione data.

[Soluzione: I_m è la parabola di equazione $\xi = m - 2\eta^2$. I punti di I_0 sono tutti di minimo locale per le corrispondenti soluzioni dell'equazione..]

Esercizio 3.6: Verificare che le funzioni $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = t^3$ sono soluzioni linearmente indipendenti della seguente equazione differenziale lineare omogenea per $t > 0$:

$$\ddot{x} - \frac{3}{t}\dot{x} + \frac{3}{t^2}x = 0.$$

Usare questo fatto per trovare tutte le soluzioni della seguente equazione non omogenea:

$$\ddot{x} - \frac{3}{t}\dot{x} + \frac{3}{t^2}x = 4t^3.$$

[Soluzione: $\alpha t + \beta t^3 + \frac{t^5}{2}$.]

Esercizio 3.7: Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = 3xy - x^2.$$

Trovare l'insieme dei punti $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ tali che la soluzione passante per (ξ,η) abbia un punto critico per $x = \xi$. Quali di questi punti è un massimo stretto (per la corrispondente soluzione)? Quali un minimo?

Suggerimento. Si sconsiglia di risolvere l'equazione.

[Soluzione: L'insieme cercato è l'unione delle rette r ed s di equazioni $\xi = 0$ e $\xi = \eta$, rispettivamente. I punti di r (risp. s) per cui la corrispondente soluzione ha ivi un massimo sono quelli per cui $\eta < 0$ (risp. $\eta > 0$). I punti di r (risp. s) per cui la corrispondente soluzione ha ivi un minimo sono quelli per cui $\eta > 0$ (risp. $\eta < 0$). La soluzione corrispondente all'origine ha, ivi, un flesso orizzontale.]

Esercizio 3.8: Si consideri, per $t > 0$, l'equazione differenziale

$$2t^2\ddot{x} + 5t\dot{x} - 2x = t.$$

Si rappresentino tutte le soluzioni ($t > 0$).

Suggerimento. Si scriva l'equazione per $y(s) = x(e^s)$ e si ricavino le soluzioni cercate da quelle di questa.

[Soluzione: $\alpha\sqrt{t} + \beta t^{-2} + \frac{1}{3}t$.]

Esercizio 3.9: Si consideri, per $t < 0$, l'equazione differenziale

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + x = t.$$

Si rappresentino tutte le soluzioni ($t < 0$).

Suggerimento. Si scriva l'equazione per $y(s) = x(-e^s)$ e si ricavino le soluzioni cercate da quelle di questa.

[Soluzione: $\alpha \sin(\ln(-t)) + \beta\cos(\ln(-t)) + \frac{1}{2}t$.]

Esercizio 3.10: Date le funzioni $x_1(t) = t^2$ e $x_2(t) = e^{-x}$, verificare che sono funzioni linearmente indipendenti, dopodiché scrivere un'equazione differenziale lineare (omogenea), di ordine più basso possibile, che sia soddisfatta da entrambe.

[Soluzione: $t^2\ddot{x} = 2t\dot{x} - 2x$.]

Esercizio 3.11: Date le funzioni $x_1(t) = t$ e $x_2(t) = t^2$, verificare che sono funzioni linearmente indipendenti, dopodiché scrivere un'equazione differenziale lineare (omogenea), di ordine più basso possibile, che sia soddisfatta da entrambe.

[Soluzione: $(t^2 + 2t)\ddot{x} = (2 - t^2)\dot{x} - 2(1 + t)x$.]

Esercizio 3.12: Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right) + \frac{y}{x}, \qquad x > 0,\ y > 0,$$

Trovare le curve isocline per questa equazione, cioè ognuna di quelle curve con la proprietà che i grafici di ogni soluzione che la interseca abbiano, nel punto di intersezione, la stessa pendenza.

Suggerimento. Osservare che, posto $f(x,y) = \cos\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) + \frac{y}{x}$, si ha $f(x,y) = f(1,y/x)$. Quindi, se y/x è costante, anche $y'(x) = f(1,x/y)$ lo è. Inoltre, la funzione $t \mapsto f(1,t)$ non è costante. Allora, se si vuole che $y'(x) = f(1,x/y)$ sia costante, bisogna che x/y lo sia.

[Soluzione: Le semirette $y = mx$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.]

3.2 Problema di Cauchy

Esercizio svolto: Assegnato $0 < \varepsilon < 2$, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} - \varepsilon\dot{x} + x(t) = \sin t, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. L'equazione differenziale è lineare, non omogenea del secondo ordine. Troviamo le soluzioni della omogenea associata. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1$ e le sue radici sono $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon \pm i\sqrt{4 - \varepsilon^2})$. Allora le soluzioni dell'equazione omogenea sono combinazioni lineari delle funzioni

$$e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\cos(\omega t)\,, \qquad e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\sin(\omega t).$$

dove si è posto $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \varepsilon^2}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma $\overline{x}(t) = a\cos t$. Derivando $\overline{x}$ e sostituendo nell'equazione si ottiene $a = \frac{1}{\varepsilon}$, e quindi $\overline{x}(t) = \frac{\cos t}{\varepsilon}$.

Allora, le soluzioni dell'equazione sono della forma

$$e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\left(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right) + \frac{\cos t}{\varepsilon}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Se valgono le condizioni iniziali, allora

$$c_1 + \frac{1}{\varepsilon} = 0, \qquad \frac{c_1\varepsilon}{2} + \omega c_2 = 0.$$

Quindi la soluzione è

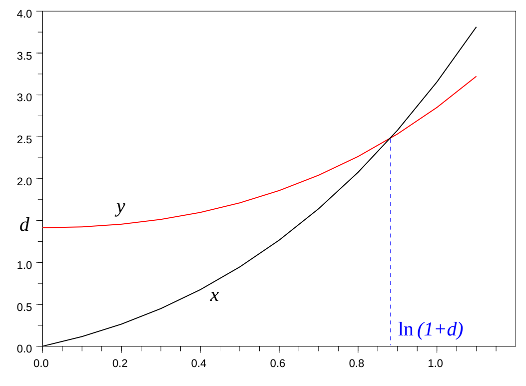
$$\frac{e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\sin(\omega t)}{2\omega} + \frac{\cos t - e^{\frac{\varepsilon t}{2}}\cos(\omega t)}{\varepsilon}.$$

Esercizio svolto: Siano $x(t)$ e $y(t)$ le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) = 2, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) - y'(t) = 2, \\ y(0) = d, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare, in dipendenza da $d > 0$, per quale valore di $t > 0$ si ha $x(t) = y(t)$.

Svolgimento. Usando il metodo risolutivo per le equazioni differenziali lineari si ottiene $x(t) = 3e^t - 2t - 3$ e $y(t) = 2e^t - 2t + d - 2$.



risolvendo $x(t) = y(t)$ rispetto a t si ottiene $t = \ln(1 + d)$.

Esercizio svolto: Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2, \\ y(x_0) = -1. \end{cases}$$

specificando per ogni valore di x_0 il dominio della soluzione trovata.

Svolgimento. L'equazione differenziale è del tipo a variabili separabili. La funzione $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione ma non del problema di Cauchy, quindi possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione per $-y(x)^2$ senza timore di perdere soluzioni. Integrando membro a membro rispetto a x, si ottiene, per la formula di sostituzione,

$$\frac{1}{y(x)} = \int \frac{y'(x)}{-y(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2.$$

Da cui segue $y(x) = \frac{1}{x^2+C}$ che rappresenta tutte le soluzioni non nulle dell'equazione differenziale al variare del parametro C.

Imponendo la validità della condizione iniziale si ha

$$-1 = \frac{1}{x_0^2 + C}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy dato è la funzione

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - x_0^2 - 1},$$

definita nell'intervallo $(-\sqrt{x_0^2+1}, \sqrt{x_0^2+1})$.

Esercizio svolto: Sia x la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \min\{x(t), x^2(t)\} \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcolare $x(3)$ ed indicare esplicitamente il dominio di x.

Svolgimento. Il membro destro dell'equazione è lipschitziano quindi il problema di Cauchy ammette unica soluzione *definita su tutto* $\mathbb{R}$. Per trovarla osserviamo che $\dot{x} = x^2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ tale che $x(t) \le 1$, mentre $\dot{x} = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ tale che $x(t) \ge 1$.

Siccome $x(0) < 1$ si deve prima risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

per i valori di t per i quali $x(t) \le 1$.

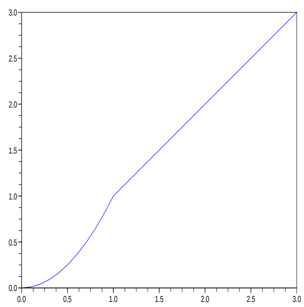
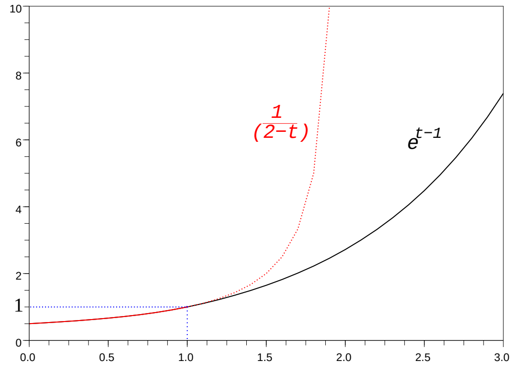


Grafico di $\min\{x, x^2\}$ risp. x.

Si ottiene $x(t) = \frac{-1}{t-2}$ per $0 \le t \le 1$. Si risolve poi il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(1) = 1$, ottenendo $x(t) = e^{t-1}$ per $t \ge 1$. Allora, $x(3) = e^2$.

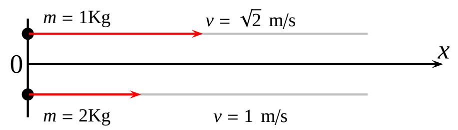


Esercizio svolto: Siano x_1 e x_2 le rispettive soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dot{x}^2 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\ddot{x} = -\dot{x}^2 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare per quale $t > 0$ si ha $x_1(t) = x_2(t)$.

(*In altre parole, si risolva il seguente problema: su due rotaie orizzontali parallele vi sono due masse di* 1 *e* 2 *Kg. Esse sono lanciate contemporaneamente, con identica energia di* 1 *J, nello stesso verso dalla stessa linea perpendicolare alle rotaie. Supponendo che il loro moto sia ostacolato da un'attrito di tipo idraulico con identico coefficiente* 1*, determinare in quale istante la massa più pesante supererà l'altra.*)



Svolgimento. Posto $z(t) = \dot{x}(t)$, le equazioni differenziali $\ddot{x} = -\dot{x}^2$ e $2\ddot{x} = -\dot{x}^2$ diventano rispettivamente $\dot{z} = -z^2$ e $2\dot{z} = -z^2$. Queste possono essere risolte con il metodo di separazione delle variabili ottenendo $t \mapsto \frac{1}{t+c_1}$ e $t \mapsto \frac{2}{t+c_2}$ come rispettive soluzioni, dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. Tenendo conto della sostituzione fatta e delle condizioni iniziali, si ottiene

$$x_1(t) = \ln\left(\sqrt{2}t + 1\right), \quad x_2(t) = 2\ln\left(\frac{t}{2} + 1\right).$$

Consideriamo l'equazione $x_1(t) = x_2(t)$ per $t > 0$. Eliminando i logaritmi si ottiene $\sqrt{2}t + 1 = (t/2+1)^2$ che ammette, come unica soluzione positiva $t = 2^{5/2} - 4$.

Esercizio svolto: Siano x_1 e x_2 le rispettive soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

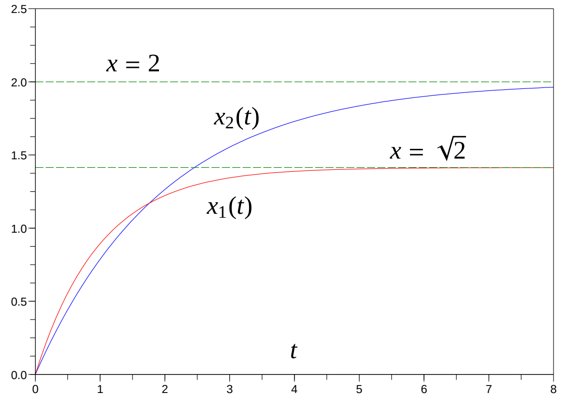
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dot{x} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\ddot{x} = -\dot{x} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare per quale $t > 0$ si ha $x_1(t) = x_2(t)$.

(*L'interpretazione fisica è simile a quella dell'esercizio precedente con la differenza che l'attrito considerato qui è di tipo viscoso)*

Svolgimento. Le equazioni differenziali sono lineari. Tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$x_1(t) = \sqrt{2} - \sqrt{2}e^{-t}, \quad x_2(t) = 2 - 2e^{-\frac{t}{2}}$$



Risolviamo l'equazione $x_1(t) = x_2(t)$ per $t > 0$ per mezzo della sostituzione $z = e^{-t/2}$. Si ottiene $\sqrt{2}z^2 - 2z + 2 - \sqrt{2} = 0$ che ha per soluzioni $z = 1$, che corrisponde a $t = 0$, e $z = \sqrt{2} - 1$ che corrisponde a $t = -2\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) > 0$, che è la soluzione cercata.

Esercizio svolto: Scrivere il polinomio di McLaurin al terzo ordine della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(\dot{x})^2 + e^t x, \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Il polinomio cercato è

$$P_3(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{\ddot{x}(0)}{2}t^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{3!}t^3.$$

I coefficienti $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ sono dati dal problema. Calcoliamo $\ddot{x}(0)$. Sostituendo $t = 0$ nell'equazione differenziale e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene $\ddot{x}(0) = -(\dot{x}(0))^2 + e^0 x(0) = -1 + 1 = 0$. Calcoliamo ora $\dddot{x}(0)$. Dall'equazione differenziale si ottiene, derivando rispetto a t,

$$\dddot{x}(t) = -2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + e^t x(t) + e^t \dot{x}(t).$$

Sostituendo $t = 0$ e usando i valori di $x(0)$, $\dot{x}(0)$ e $\ddot{x}(0)$, si ottiene $\dddot{x}(0) = 2$. Allora, il polinomio cercato è:

$$P_3(t) = 1 + t + \frac{t^3}{3}.$$

Esercizio 3.13: Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy specificandone il dominio:

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x)^2 + 1)2x, \\ y(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 0. \end{cases}$$

[Soluzione: $y(x) = \tan(x^2 - \frac{\pi}{2})$, dominio: $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.]

Esercizio 3.14: Trovare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy specificandone il dominio:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \sin(x), \\ y(0) = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \sin(x), \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 3.15: Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (x + 1)y^2, \\ y(0) = -1/a, \quad a > 0. \end{cases}$$

specificando per ogni valore di a il dominio della soluzione trovata.

Esercizio 3.16: Dato il numero $a \in \mathbb{R}$, sia y_a la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -\min\{x, x^2\}y(x), \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Determinare, per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ il valore di $y_a(2)$.

Esercizio 3.17: Risolvere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xy + \alpha y, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Sia $y_\alpha(x)$ la soluzione, determinare α affinché $y_\alpha(1) = 0$.

Esercizio 3.18: Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando il dominio della soluzione

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{e^{2/t}}{t^2} \\ y(1) = 2e^2 \end{cases}.$$

Esercizio 3.19: Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2 e^{-y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

specificando il dominio della soluzione trovata.
Suggerimento. Il dominio della soluzione è l'intervallo massimale, contenente il valore iniziale della x, in cui la funzione trovata è positiva

Esercizio 3.20: Risolvere il seguente problema di Cauchy per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = xy - \alpha x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Sia $y_\alpha(x)$ la soluzione, determinare $\overline{\alpha}$ affinché $y_{\overline{\alpha}}(\sqrt{2}) = 1$.
Suggerimento. Per trovare $y_\alpha(x)$ considerare α come una costante ed applicare la formula usuale imponendo la condizione iniziale $y_\alpha(0) = 1$.

Esercizio 3.21: Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x^2+y^2(x)}{2xy(x)}, \\ y(1) = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = \frac{x^2+y^2(x)}{2xy(x)}, \\ y(-1) = 1, \end{cases}$$

specificando il dominio delle soluzioni trovate.
Suggerimento. Usare la sostituzione $y(x) = xz(x)$.

Esercizio 3.22: Siano $x(t)$ e $y(t)$ le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = (t+1)^2, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = (t-1)^2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Studiare la funzione $z(t) := x(t) - y(t)$.
Suggerimento. La funzione z è soluzione del seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 4t, \\ z(0) = -1, \\ z'(0) = -1. \end{cases}$$

Non è necessario risolvere i problemi (A) e (B).

Esercizio 3.23: Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''(x) + y'(x) = e^{2x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Suggerimento. Usare la sostituzione $z(x) = y'(x)$.

Esercizio 3.24: Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ tale che la soluzione $y_\alpha(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\alpha y'(x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1, \end{cases}$$

soddisfi $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = 0$.

Esercizio 3.25: Determinare, per ogni $a > 0$, la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} ay''(x) - 2y(x) = -\cos(x) + \frac{2}{a+2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

dopodiché, se possibile, calcolare per ogni $x > 0$ il limite

$$\lim_{a\to 0^+} y_a(x).$$

Esercizio 3.26: Calcolare, per ogni $a > 0$ la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema:

$$\begin{cases} ay''(x) - y(x) = \sin(x/a), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{a\to 0^+} y_a(x)$ per ogni $x \geq 0$ fissato.

Esercizio 3.27: Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ (se esistono), la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -y'(x) + \alpha \sin x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

è limitata su $\mathbb{R}$.

[Soluzione: $\alpha = -2$.]

Esercizio 3.28: Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ (se esistono), la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -y(x) + \alpha \sin x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

è limitata su $\mathbb{R}$.

[Soluzione: $\alpha = 0$.]

Esercizio 3.29: Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ (se esistono) le soluzioni del seguente problema di Cauchy sono limitate su $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y''(x) = -y'(x) + \sin x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = b. \end{cases}$$

[Soluzione: $b = -\frac{1}{2}$.]

Esercizio 3.30: Sia $a \in \mathbb{R}$. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

specificando per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ il dominio della soluzione trovata.

[Soluzione: Se $a \neq 0$, $y_a(x) = (x^2 + \frac{1}{a})^{-1}$; se $a = 0$, $y_a(x) \equiv 0$. Dominio di y_a se $a \geq 0$: tutto $\mathbb{R}$; se $a < 0$: $\{x \in \mathbb{R} : -1/\sqrt{a} < x < 1/\sqrt{a}\}$.]

Esercizio 3.31: Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = a, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = b. \end{cases}$$

Sapendo che $a^2 + b^2 \leq 1$, determinare per quali valori di a e b la funzione $(a, b) \mapsto y'_{a,b}(1)$ assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

Esercizio 3.32: Sia $y_a(x)$, per ogni $a \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'' = -a^2 y', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = a. \end{cases}$$

Per quali valori di a la funzione $a \mapsto y'_a(1)$ assume il suo massimo?

Esercizio 3.33: Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$ la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = (y^2 - y)x, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Per quali valori di a la funzione $y_a(x)$ è limitata?

Esercizio 3.34: Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, sia $y_{a,b}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -y + ax^2 + bx, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Determinare (a, b) affinché $y_{a,b}(2\pi) = 2\pi$ e sia minimo il valore di $\int_0^{2\pi} (y''(x) - 2a)^2 \,\mathrm{d}x$.

[Soluzione: $a = \frac{\pi}{2(1+\pi^2)}$.]

Esercizio 3.35: Siano ξ e η le rispettive soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = a \end{cases}$$

Posto $m_a := \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\xi(x) - \eta(x)\right|$, determinare il valore di a tale che m_a sia minimo (in altre parole scegliere la velocità iniziale del secondo oscillatore in modo che si allontani il meno possibile dal primo).

[Soluzione: $a = 0$.]

Esercizio 3.36: Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $(a, b) \in Q = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 1\}$, la soluzione del seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'' = -a^{-2} y', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = b^2. \end{cases}$$

Per quali valori di $(a, b) \in Q$ la funzione $(a, b) \mapsto y_{a,b}(a^2)$ assume il suo minimo?

Esercizio 3.37: Sia x la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(t + 1)\dot{x} - x^2, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 3. \end{cases}$$

Determinare

$$\ell_1 = \lim_{t\to 0} \frac{2x(3t)}{t^5 - 9t} \qquad \text{e} \qquad \ell_2 = \lim_{t\to 0} \frac{x(t) - 3t}{3t^2 + t^5}$$

Suggerimento. Dedurre dall'equazione e dalle condizioni iniziali i coefficienti dello sviluppo di McLaurin di $x(t)$ all'ordine opportuno.

[Soluzione: $\ell_1 = -2$, $\ell_2 = -\frac{3}{2}$.]

Esercizio 3.38: Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = a, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = b. \end{cases}$$

Sapendo che $a^2 + b^2 \leq 1$, determinare per quali valori di a e b la funzione $(a, b) \mapsto y'_{a,b}(1)$ assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

Esercizio 3.39: Si consideri il seguente problema di Cauchy dipendente dal parametro $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha\dot{x} + 1, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Determinare α in modo tale che

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = \sqrt{2}.$$

[Soluzione: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.]

Esercizio 3.40: Si consideri il seguente problema di Cauchy dipendente dal parametro $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha\dot{x}, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Determinare α in modo tale che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \sqrt{2}.$$

[Soluzione: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.]

Esercizio 3.41: Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro di "controllo" $u \in (0, \infty)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + u, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

Denotiamo con $x_u(t)$ la soluzione al tempo t di tale problema. Determinare per quali valori di u si ha $x_u(1) \in (1, 2)$.

[Soluzione: $\frac{3}{e^3-1} < u < \frac{6}{e^3-1}$.]

Esercizio 3.42: Dimostrare che per ogni $k \in (0, +\infty)$, esiste una sola funzione x_k continua in $\mathbb{R}$ e derivabile per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/k\}$, tale che

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -x(t) + f_k(t), \\ x(-1) = 0, \\ \dot{x}(-1) = 0. \end{cases}$$

dove la funzione f_k è data da

$$f_k(t) = \begin{cases} k & \text{se } t \in [0, 1/k], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare x_k e calcolare, per ogni $t \in \mathbb{R}$ il limite

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t).$$

Suggerimento. L'unicità segue applicando tre volte il teorema di Cauchy.

[Soluzione: x_k è data da

$$x_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0, \\ \frac{k}{2}t^2 & \text{se } t \in [0, 1/k], \\ t - \frac{1}{2k} & \text{se } t \ge 1/k. \end{cases}$$

Quindi $x(t) = 0$ se $t \le 0$ e $x(t) = t$ se $t \ge 0$..]

Esercizio 3.43: Si consideri il seguente problema di Cauchy contenente il parametro $a > 0$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2a\dot{x} + a^2 x = 0, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di $a > 0$, la soluzione $x_a(t)$ al tempo t di tale problema.

2. Determinare per quali valori di a esiste almeno un $t_0 > 0$ tale che $x_a(t_0) = 1$.

Esercizio 3.44: Dato $v \in \mathbb{R}$ sia $t \mapsto x(t, v)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{x} - x, \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = v. \end{cases}$$

Determinare il minimo della funzione $v \mapsto |x(1, v)|$ per $v \in [1, 2]$.

[Soluzione: e.]

Esercizio 3.45: Sia $x_u(t, \ell, v)$ la soluzione al tempo t del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} = t - u, \\ x(0) = \ell, \\ \dot{x}(0) = v. \end{cases}$$

Determinare al variare della posizione ℓ e velocità v iniziali, per quale valore del parametro $u \in \mathbb{R}$ la funzione $u \mapsto \int_0^1 (\dot{x}_u(t, \ell, v))^2 \, dt$ raggiunge il suo minimo.

[Soluzione: $u = 3v - \frac{3}{8}$, ℓ qualunque.]

Esercizio 3.46: Un cannoncino spara un proiettile di massa M con energia E in direzione orizzontale. Sia α il coefficiente di attrito viscoso a cui il proiettile è sottoposto nel suo moto.

1. Determinare la legge oraria del moto orizzontale.

2. Determinare l'estremo superiore della distanza (in orizzontale) raggiunta dal proiettile, supponendo che questo sia libero di cadere senza ostacoli.

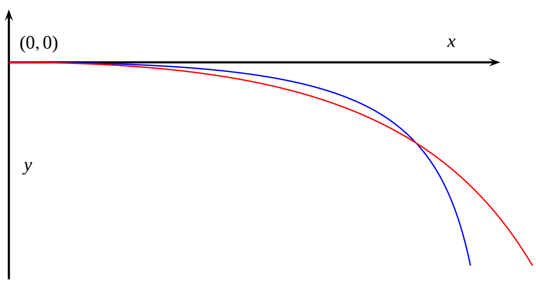
3. Calcolare quanto tempo $\bar{t}$ impiegherà il proiettile a raggiungere la distanza (in orizzontale) d dal cannoncino. E, trascurando l'attrito nel moto verticale, calcolare di quanto si sarà abbassata la traiettoria rispetto all'orizzontale in quell'istante.

4. Sempre rascurando l'attrito nel moto verticale, trovare quale distanza d (in orizzontale) dal cannoncino la traiettoria si sarà abbassata di h (sempre rispetto all'orizzontale).

Suggerimento. L'equazione che governa il moto orizzontale è

$$M\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$$

e la velocità iniziale vale $\sqrt{\frac{2E}{M}}$. *Invece, il moto verticale è governato dall'equazione* $\ddot{y} = -\mathbf{g}$ *dove* $\mathbf{g}$ *è l'accelerazione gravitazionale.*



Il disegno mostra due traiettorie possibili corrispondenti alla stessa energia iniziale. Quella rossa corrisponde ad una massa doppia rispetto alla blu. Per motivi grafici il rapporto tra gli assi delle ascisse e delle ordinate è stato alterato. Notiamo che la traiettoria corrispondente al proiettile più pesante rimane inizialmente al di sotto dell'altra.

[Soluzione: (1) $x(t) = \frac{\sqrt{2EM}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{M}}\right)$,
(2) $\frac{\sqrt{2EM}}{\alpha}$,
(3) $\bar{t} = \frac{M}{\alpha}\ln\left(\frac{\sqrt{2EM}}{\sqrt{2EM}-\alpha d}\right)$, abbassamento: $\frac{M\mathbf{g}}{2\alpha^2}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2EM}}{\sqrt{2EM}-\alpha d}\right)\right]^2$,
(4) $x\left(\sqrt{\frac{2h}{\mathbf{g}}}\right) = \frac{\sqrt{2EM}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{2h\alpha}{\mathbf{g}M}}\right)$.]

Esercizio 3.47: Data la costante $b \in \mathbb{R}$, sia $x_b(\cdot)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1}{4}x + \sin(t), \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = b. \end{cases}$$

Determinare per quale valore di b, x_b è 2π-periodica.

[Soluzione: $b = -\frac{4}{3}$.]

Esercizio 3.48: Sia $x_a(t)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2-1}{t^2+1}, \\ x(0) = a \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{t\to+\infty} x_{\frac{1}{2}}(t)$.

[Soluzione: -1.]

Esercizio 3.49: Siano k e a costanti reali assegnate, e siano b e c parametri reali. Si considerino i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + k \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{y} = ay + b + ce^{-t} \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

e supponiamo che $x_0 \neq y_0$. Denotiamone con $x(t)$ e $y_{b,c}(t)$ le rispettive soluzioni al tempo $t \geq 0$. Determinare, se esistono, i valori di b e c tali che

$$\lim_{t\to+\infty} |y_{b,c}(t) - x(t)| = 0$$

Stabilire inoltre per quali valori di a è possibile determinare b e c in modo tale che esista una costante H con la proprietà che

$$|y_{b,c}(t) - x(t)| \leq He^{-t}, \quad t > 0.$$

[Soluzione: Per $a < 0$ basta scegliere $b = k$ e c qualunque. Nel caso $a \geq 0$ si deve prendere $b = k$ e $c = (a+1)(x_0 - y_0)$. Per $a = -1$ non è possibile determinare b e c in modo tale che esista una costante H con la proprietà richiesta.]

Esercizio 3.50: Siano c, α e β costanti reali assegnate con $\alpha \neq \beta$. Si considerino i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + \alpha e^{-t} \\ x(0) = a \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{y} = cy + \beta e^{-t} \\ y(0) = b \end{cases}.$$

Denotiamone con $x_a(t)$ e $y_b(t)$ le rispettive soluzioni al tempo $t \geq 0$.

Dato b, determinare a in modo tale che

$$\lim_{t\to+\infty} |y_b(t) - x_a(t)| = 0$$

Stabilire inoltre per quali valori di c esistono a e b tali che sia possibile determinare una costante H con la proprietà che

$$|y_b(t) - x_a(t)| \leq He^{-t}, \quad t > 0.$$

[Soluzione: Per $c < 0$, b può essere qualunque. Nel caso $c \geq 0$ si deve prendere $a = b + \frac{\alpha-\beta}{c+1}$. Per $c = -1$ non è possibile determinare a e b in modo tale che esista una costante H con la proprietà richiesta.]

Esercizio 3.51: Determinare, se esiste, una funzione C^1, $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che

$$\int_1^t 3x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t) - 1.$$

Suggerimento. Derivando etrambi i membri si ottiene l'equazione differenziale $\dot{x} = 3x$. Valutando inoltre l'identità in $t = 1$ si ottiene la condizione $x(1) = 1$. La soluzione si ottiene risolvendo il problema di Cauchy così ottenuto.

[Soluzione: $x(t) = e^{3(t-1)}$.]

Esercizio 3.52: Si consideri il seguente problema di Cauchy dipendente dai parametri reali a, b:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -(\dot{x})^2 - e^{-t}x, \\ x(0) = a, \\ \dot{x}(0) = b \end{cases}$$

Determinare per quali valori della coppia (a, b) si ha $\ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0$.

Suggerimento. <u>Non</u> tentare di risolvere l'equazione differenziale ma ricavare $\ddot{x}(0)$ e $\dddot{x}(0)$ direttamente dalle condizioni iniziali e dall'equazione.

[Soluzione: Ci sono tre soluzioni: $(a,b) = (0,0)$, $(a,b) = \left(\frac{9+\sqrt{17}}{32}, \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$ e $(a,b) = \left(\frac{9-\sqrt{17}}{32}, \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)$.]

Esercizio 3.53: Sia $x_{a,b}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x\dot{x} - x^2, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare il polinomio $P_4(t)$ di McLaurin al quarto ordine di $x_{a,b}$.

[Soluzione: $P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4$.]

Esercizio 3.54: Sia x_α la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x\dot{x} - e^{-t}x, \\ x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = \alpha \end{cases}$$

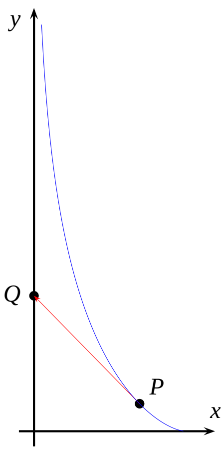
Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite:

$$L(\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{\sin(t) - x_\alpha(t)}.$$

Suggerimento. *Non tentare di risolvere l'equazione differenziale ma ricavare il polinomio di McLaurin di x_α all'ordine opportuno.*

[Soluzione: $L(\alpha) = 0$, se $\alpha \neq 1$, e $L(\alpha) = 6$ per $\alpha = 1$.]

Esercizio 3.55: Un punto Q si muove sull'asse y verso l'alto partendo, dall'origine. Un punto P, si muove verso Q, partendo dalla posizione $(1, 0)$, in modo tale da mantenere una distanza costante da Q. Descrivere la traiettoria di P.



Suggerimento. Indicando con (x, y) e (ξ, η) le coordinate di P e Q rispettivamente, la condizione che P si muova verso Q si scrive

$$y' = \frac{\eta - y}{\xi - x}.$$

d'altra parte, la condizione che Q appartenga all'asse y ci dice che $\xi = 0$. Sappiamo inoltre che $\|P - Q\|$ è uguale a 1. Cioè che $1 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = x^2 + (\eta - y)^2$. Allora, $y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Sappiamo anche che $y = 0$ quando $x = 1$. Ci siamo dunque ridotti ad un problema di Cauchy. L'equazione differenziale si risolve semplicemente integrando.

[Soluzione: $y = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$. La curva ottenuta si chiama **trattrice**.]

3.3 Problemi al bordo e misti, altri problemi

Esercizio svolto: Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il seguente problema ammette soluzioni

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \lambda \cos x \\ y(0) = y(2\pi) \end{cases}$$

Svolgimento. Determiniamo le soluzioni dell'equazione lineare omogenea $y''(x) + y(x) = 0$. L'equazione caratteristica $z^2 + 1 = 0$ ha soluzioni $\pm i$. Dunque le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono soluzioni (linearmente indipendenti) dell'equazione lineare omogenea; le cui soluzioni saranno quindi tutte della forma $A\cos x + B\sin x$, per $A, B \in \mathbb{R}$. Determiniamo le soluzioni dell'equazione non omogenea cercando una soluzione particolare della forma $\overline{y}(x) = \alpha x \sin(x) + \beta \sin(x) + \gamma x \cos x + \delta \cos x$. Si ha:

$$\begin{aligned} \overline{y}'(x) &= \alpha \sin x + \alpha x \cos x + \beta \cos x \\ &\quad + \gamma \cos x - \gamma x \sin x - \delta \sin x, \\ \overline{y}''(x) &= 2\alpha \cos x - \alpha x \sin x - \beta \sin x \\ &\quad - 2\gamma \sin x - \gamma x \cos x - \delta \cos x. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione ed imponendo che valga identicamente l'identità, si ottiene

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = -\frac{\lambda}{2}, \delta = 0.$$

Allora tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea si rappresentano nella forma $y_{A,B}(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{\lambda}{2} x \cos x$, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Dunque, l'unico valore di λ per cui è soddisfatta la condizione $y(0) = y(2\pi)$ è $\lambda = 0$.

Esercizio svolto: Determinare, se esistono, le soluzioni limitate della seguente equazione differenziale:

$$y'(x) = -y(x) - \sin(x).$$

Svolgimento. Tutte le soluzioni dell'equazione data sono della forma $y(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + Ce^{-x}$ con C una costante.

L'unica soluzione limitata (su $\mathbb{R}$) si ha per $C = 0$, cioè: $y(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$.

Esercizio svolto: Al variare dei parametri $\omega \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a. \end{cases}$$

1. Se ω è pari, per ogni valore di a il problema ammette una ed una sola soluzione. Determinarla.

2. Se ω è dispari, stabilire per quali valori di a esiste almeno una soluzione.

Svolgimento. La soluzione generale dell'equazione differenziale data è $y(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)$. Imponendo che sia soddisfatta la condizione $y(0) = 0$ si ottiene $C_1 = 0$. Imponiamo ora la condizione $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$; si ottiene la relazione

$$C_2\omega\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) = a. \qquad (\star)$$

Distinguiamo i due casi "ω pari" e "ω dispari".

Se ω è pari possiamo scrivere $\omega = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Dunque $(\star)$ si può scrivere come $C_2 2k\cos(k\pi) = a$. Poiché $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$, risolvendo rispetto a C_2 si ottiene

$$C_2 = \frac{a}{(-1)^k 2k} = \frac{(-1)^{\omega/2}a}{\omega}.$$

Quindi $y(x) = \frac{(-1)^{\omega/2} a}{\omega}\sin(\omega x)$.

Se ω è dispari possiamo scrivere $\omega = 2k-1$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. La ($\star$) si può scrivere come

$$C_2(2k-1)\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = a.$$

Poiché $\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, la ($\star$) si può risolvere rispetto a C_2 se soltanto se $a = 0$. In questo caso il problema ammette infinite soluzioni della forma $y(x) = C_2\sin(\omega x)$.

Esercizio svolto: Al variare del parametro $\alpha \geq 0$ si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \alpha^2 x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Determinare, se esiste, una soluzione x_α di tale problema e scegliere α in modo tale che

$$h(\alpha) = \int_0^1 x_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

sia massimo.

Svolgimento. Se $\alpha = 0$, il problema ammette come unica soluzione $x_0(t) = 1 - t$. Quindi, $h(0) = \frac{1}{2}$.

Per $\alpha > 0$, la soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$A\cosh(\alpha t) + B\sinh(\alpha t),$$

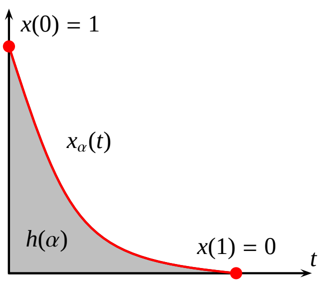
con A e B costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni al bordo si ottiene

$$\begin{cases} 1 = x_\alpha(0) = A \\ 0 = x_\alpha(1) = A\cosh(\alpha) + B\sinh(\alpha). \end{cases}$$

Da cui segue che l'unica soluzione ($\alpha > 0$) del problema assegnato è data da

$$x_\alpha(t) = \cosh(\alpha t) - \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)}\sinh(\alpha t).$$

Il grafico di x_α è in rosso, $h(\alpha)$ è l'area del sottografico.

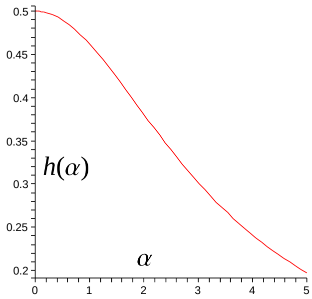


Integrando rispetto a t, per $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\left[\sinh(\alpha t) - \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)}\cosh(\alpha t)\right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{(e^\alpha - 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Allora, per $\alpha \in [0, +\infty)$,

$$h(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{(e^\alpha - 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)} & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$



Si vede subito che, per $\alpha > 0$, $h(\alpha)$ è continua, monotona e decrescente, quindi il suo massimo è raggiunto per $\alpha = 0$.

Esercizio svolto: Dato $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dimostrare che per ogni funzione T-periodica $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T > 0$, l'equazione

$$\dot{x}(t) = ax(t) + g(t) \tag{$\star$}$$

ammette un'unica soluzione T-periodica e determinare una formula per calcolarla.

Svolgimento. Dalla formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine si ha che una qualunque soluzione di ($\star$) si scrive come segue per un'opportuna costante k:

$$x(t) = ke^{ta} + \int_0^t e^{(t-s)a} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità è sufficiente vedere che la condizione $x(0) = x(T)$ (che segue dalla T-periodicità) determina la costante k in modo univoco. Infatti,

$$x(T) = ke^{Ta} + \int_0^T e^{(T-s)a} g(s)\,\mathrm{d}s = x(0) = k$$

da cui, necessariamente,

$$k = \frac{-1}{e^{Ta} - 1}\int_0^T e^{(T-s)a} g(s)\,\mathrm{d}s$$

Allora, la formula cercata è:

$$x(t) = \frac{-e^{ta}}{(e^{Ta} - 1)}\int_0^T e^{(T-s)a} g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t e^{(t-s)a} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Esercizio svolto: Determinare, se esiste, una soluzione del seguente problema misto:

$$\begin{cases} y'' + 2xy' = 0, \\ y(0) = -1, \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Stabilire se la (eventuale) soluzione trovata è unica.

Svolgimento. Applicando la sostituzione $z(x) = y'(x)$ l'equazione si riduce a $z'(x) = 2xz(x)$, le cui soluzioni sono della forma $z(x) = ke^{-x^2}$ con k una costante arbitraria. Dunque le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutte della forma

$$y(x) = k\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + C$$

dove C è un'altra costante arbitraria. Scegliamo le costanti in modo tale che $y(0) = -1$. Si ottiene che necessariamente $C = -1$. Poiché, come è noto,

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

dalla condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$, tenendo conto di $C = -1$, segue che deve essere $k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Dunque la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - 1.$$

Per quanto riguarda l'unicità, si osservi che i passaggi precedenti determinano le costanti C e K in modo univoco. Quindi la soluzione trovata è unica.

Esercizio 3.56: Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = -y', \\ y(0) = a, \\ y(1) = b. \end{cases}$$

Sapendo che $a^2 + b^2 \le 1$, determinare per quali valori di a e b la funzione $(a, b) \mapsto y_{a,b}(\frac{1}{2})$ assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

Esercizio 3.57: Determinare (se esistono) per quali valori di α il seguente problema al bordo

$$\begin{cases} y''(x) - \alpha^2 y(x) = \sin(x), \\ y(0) = y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

ammette una soluzione y_α tale che $y_\alpha(\pi/2) = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 3.58: Calcolare (se esistono) al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ le soluzioni del seguente problema:

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = \lambda\sin x, \\ y(\pi) = \frac{4}{5}\lambda, \\ y(0) = y(2\pi). \end{cases}$$

[Soluzione: $-\frac{2}{5}\lambda(\sin x + 2\cos x)$.]

Esercizio 3.59: Calcolare, al variare di $\lambda \in [0, +\infty)$, la soluzione (o *le* soluzioni) del seguente problema (detto "al bordo")

$$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) = \lambda\sin(x), \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Suggerimento. Determinare la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea e poi imporre le "condizioni al bordo" $y(0) = y(2\pi) = 0$.

Esercizio 3.60: Determinare per quale valore di $\lambda \in (0, +\infty)$ esiste una soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = \lambda\sin(x), \\ y(0) = y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Dire se tale soluzione è unica e, nel caso, calcolarla. [Soluzione: Per $\lambda \notin \{k^2 : k = 1, 2, \dots\}$ il problema ammette unica soluzione data da

$$x \mapsto \frac{\lambda\sin x}{\lambda - 1}.$$

Per $\lambda = 1$ il problema non ammette soluzione, mentre ammette infinite soluzioni per $\lambda \in \{k^2 : k = 2, 3, \dots\}$.]

Esercizio 3.61: Determinare per quali valori di $\lambda \in (0, +\infty)$ esiste una soluzione $y_\lambda(x)$ del seguente problema periodico:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = \lambda\sin(x), \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

Dire se tale soluzione è unica e calcolarla. [Soluzione: Il problema ammette unica soluzione per

$$\lambda \notin \left\{\frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 : k = 0, 1, \dots\right\} \cup \{k^2 : k = 1, 2, \dots\}$$

data da:

$$x \mapsto \frac{\lambda^2\sin x + \lambda - 1}{\lambda^2 - \lambda}.$$

Per $\lambda = 1$ il problema non ammette soluzione, mentre ammette infinite soluzioni per $\lambda \in \{\frac{1}{4}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 : k = 0, 1, \dots\} \cup \{k^2 : k = 2, 3, \dots\}$.]

Esercizio 3.62: Determinare, se esiste, una soluzione del problema al bordo

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x, \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

[Soluzione: $y(x) = 2(1 - x)e^{-x} + 2xe^{1-x} - 2 + x$.]

Esercizio 3.63: Determinare, se esiste, una soluzione del problema al bordo

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = -x, \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

[Soluzione: $y(x) = 2e^x - 2xe^x + 4xe^{x-1} - x - 2$.]

Esercizio 3.64: Determinare, se esiste, una soluzione dei seguenti problemi misti

$$\begin{cases} y''(x) = y(x) + e^x, \\ y(0) = 1, \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(x) = y(x) + e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.65: Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste, una soluzione del problema al limite

$$\begin{cases} y''(x) = -y'(x) - e^x, & x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \alpha. \end{cases}$$

[Soluzione: $y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \alpha$.]

Esercizio 3.66: Determinare, se esiste, una soluzione del seguente problema misto:

$$\begin{cases} y'' = -y - e^x + \sin x, \\ y(0) = 1, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

[Soluzione: Non esiste una soluzione.]

Esercizio 3.67: Determinare una soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = e^x - 2x, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

[Soluzione: $y(x) = xe^x - e^x + x^2 - \frac{3e^x}{e-1} + 2\,x + \frac{2+e}{e-1}$.]

Esercizio 3.68: Determinare una soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = 3e^{2x} - x, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 1 + 3e^2. \end{cases}$$

Tale soluzione è unica?

Esercizio 3.69: Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = a, \\ y(\frac{\pi}{2}) = b. \end{cases}$$

Sapendo che $a^2 + b^2 = 1$, determinare per quali valori di a e b la funzione

$$(a, b) \mapsto \int_0^{\pi} |y_{a,b}(x)|\,\mathrm{d}x$$

assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

[Soluzione: La funzione è identicamente uguale a 2 per ogni coppia (a, b) tale che $a^2 + b^2 = 1$.]

Esercizio 3.70: Sia $y_{a,b}(x)$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = a, \\ y(\frac{\pi}{2}) = b. \end{cases}$$

Sapendo che $a^2 + b^2 = 1$, determinare per quali valori di a e b la funzione

$$(a, b) \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$$

assume il suo massimo. Quanto vale questo massimo?

Esercizio 3.71: Determinare, se esiste, una soluzione del seguente problema misto:

$$\begin{cases} y'' - 4y = 3, \\ y(0) = 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0. \end{cases}$$

Stabilire se la (eventuale) soluzione trovata è unica.

Esercizio 3.72: Determinare, se esiste, una soluzione del seguente problema misto:

$$\begin{cases} y'' + xy' = 0, \\ y(0) = -2, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

Stabilire se la (eventuale) soluzione trovata è unica.

Esercizio 3.73: Trovare, se esiste, una soluzione limitata della seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} = 9x + \sin(t) - \cos(2t),$$

e stabilire se essa è unica.

Esercizio 3.74: Determinare una soluzione del seguente problema ai valori intermedi (detto di Picard) e discuterne l'unicità.

$$\begin{cases} x''' - x' = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(\frac{\pi}{2}) = 1, \\ x(\pi) = 0. \end{cases}$$

[Soluzione: $x(t) = \sin(t)$, tale soluzione è unica.]

Esercizio 3.75: Determinare, al variare del parametro $u \in \mathbb{R}$ una soluzione del problema

$$\begin{cases} \ddot{x} = u^2\dot{x} + u^2, \\ x(0) = 0 = x(1), \end{cases}$$

per $t \in [0, 1]$ e provarne l'unicità. Detta $x_u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema assegnato, osservare che essa dipende in modo continuo da u e mostrare che la funzione $u \mapsto x_u(1)$ assume il valore minimo per $u = 0$.

Suggerimento. Sfruttare il fatto che per ogni $u \in \mathbb{R}$ si ha $e^u \geq 1 + u$.

Esercizio 3.76: Determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = 2y$$

il cui grafico è tangente in qualche punto alla parabola P di equazione $y = x^2$.

[Soluzione: Ci sono due soluzioni: $y(x) = e^{2x-2}$, il cui grafico è tangente a P in $(1, 1)$, e $y(x) \equiv 0$ il cui grafico è tangente a P in $(0, 0)$.]

Esercizio 3.77: Verificare che il seguente problema dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$ ammette una sola soluzione.

$$\begin{cases} \ddot{x} = t - a, \\ x(0) = 1 = x(1). \end{cases}$$

Indichiamo con $x_a(t)$ la soluzione di questo problema al tempo t. Determinare, se esiste, per quale valore di a la funzione

$$a \mapsto \int_0^1 (\dot{x}_a(t))^2 \, \mathrm{d}t$$

raggiunge il suo minimo.

[Soluzione: $a = -\frac{1}{14}$.]

Esercizio 3.78: Data la costante $a \in \mathbb{R}$, verificare che esiste un'unica soluzione $x_a(\cdot)$ del seguente problema al bordo:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1}{4}x + \sin(t), \\ x(0) = 0, \\ x(\frac{\pi}{4}) = a, \end{cases}$$

e determinare per quale valore di a la funzione x_a è 2π-periodica.

[Soluzione: $b = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.]

Esercizio 3.79: Dato $k \in \mathbb{R}$, determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + a\dot{x} + kx = 0$$

sono tutte oscillanti (cioè cambiano segno infinite volte).

Suggerimento. Fare in modo che le radici del polinomio caratteristico siano tutte complesse in modo tale che le soluzioni vengano combinazioni di seni e coseni.

[Soluzione: Se $k > 0$, deve essere $-2\sqrt{k} < a < 2\sqrt{k}$; se $k \leq 0$, non esistono valori di a con la proprietà richiesta.]

Capitolo 4

Curve nel piano e nello spazio. Superfici

Si vedano anche le parti sugli integrali curvilinei e di superficie.

4.1 Sistemi di coordinate e parametrizzazioni

Esercizio svolto: Scrivere in coordinate polari la parabola di equazione cartesiana $y = x^2 - 1$.

Svolgimento. Posto $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, otteniamo $\rho\sin\theta = \rho^2(\cos\theta)^2 - 1$ da cui, risolvendo rispetto a ρ e selezionando la soluzione non negativa, segue

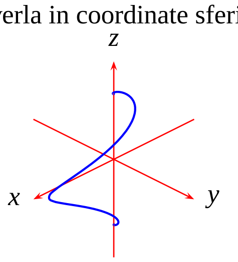
$$\rho = \frac{\sin\theta + \sqrt{1 + 3(\cos\theta)^2}}{2(\cos\theta)^2}.$$

Questa formula ha senso per $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, tuttavia, come si vede subito, la funzione nel membro destro può essere estesa con continuità agli intervalli del tipo $\left(-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio svolto: Sia data la seguente curva in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \rho = \frac{4}{\cosh\theta} \\ \zeta = 4\tanh\theta. \end{cases}$$

(Curva lossodromica.) Ricavare una parametrizzazione per questa curva e scriverla in coordinate sferiche.



Svolgimento. Dal momento che

$$\begin{cases} x(\rho,\theta,\zeta) = \rho\cos\theta, \\ y(\rho,\theta,\zeta) = \rho\sin\theta, \\ z(\rho,\theta,\zeta) = \zeta \end{cases}$$

sostituendo opportunamente otteniamo la rappresentazione parametrica

$$\theta \mapsto \left(\frac{4\cos\theta}{\cosh\theta}, \frac{4\sin\theta}{\cosh\theta}, 4\tanh\theta\right)$$

Ricaviamo ora l'equazione in coordinate sferiche. In questo sistema di coordinate $\phi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, \pi]$, e

$$\begin{cases} x(r,\phi,\psi) = r\cos\phi\sin\psi, \\ y(r,\phi,\psi) = r\sin\phi\sin\psi, \\ z(r,\phi,\psi) = r\cos\psi. \end{cases}$$

Sostituendo,

$$\begin{cases} \frac{4\cos\theta}{\cosh\theta} = r\cos\phi\sin\psi, \\ \frac{4\sin\theta}{\cosh\theta} = r\sin\phi\sin\psi, \\ 4\tanh\theta = r\cos\psi, \end{cases}$$

cerchiamo ora di eliminare i parametri θ e r da questo sistema. Per prima cosa osserviamo che r rappresenta la distanza dall'origine. Quindi

$$r = \sqrt{\frac{16(\cos\theta)^2}{(\cosh\theta)^2} + \frac{16(\sin\theta)^2}{(\cosh\theta)^2} + 16(\tanh\theta)^2} = 4\sqrt{\frac{1 + (\sinh\theta)^2}{(\cosh\theta)^2}} = 4.$$

Teniamo ora conto del fatto che θ e ϕ rappresentano lo stesso angolo. Allora, usando, per esempio, la prima equazione otteniamo $\sin\psi = \cosh\phi$, che, assieme a $r = 4$ da la rappresentazione cercata. Notiamo che usando un'altra delle tre equazioni avremmo ottenuto un legame equivalente tra ψ e ϕ.

Esercizio 4.1: Scrivere l'equazione della retta $x + 2y = 3$ in coordinate polari.

[Soluzione: $\rho = \frac{3}{\cos\theta + 2\sin\theta}$.]

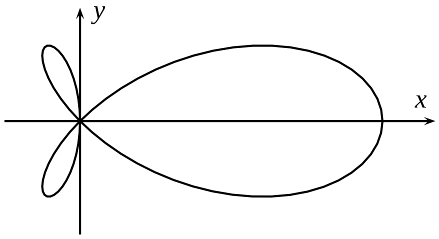
Esercizio 4.2: Scrivere l'equazione della retta $x - 2y = 0$ nelle coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) = 2\rho\cos\theta, \\ y(\rho,\theta) = 3\rho\sin\theta, \end{cases}$$

[Soluzione: $\theta = \arctan(1/3)$.]

Esercizio 4.3: Data la curva di equazione polare $\rho = 4\cos\theta\cos(2\theta)$ (detta *torpedine*), ricavare una parametrizzazione e scrivere l'equazione cartesiana.

Suggerimento. Ricavarsi per prima cosa una parametrizzazione, poi usare la formula di duplicazione $\cos(2t) = 2(\cos t)^2 - 1$ *per scrivere* x *e* y^2 *in termini di* $u := \cos(2t)$*. Eliminare poi il parametro* u*. La curva è illustrata nella figura qui sotto.*



[Soluzione: $t \mapsto \left(4(\cos t)^2\cos(2t), \sin(4t)\right)$ per $t \in [0, \pi]$, $(x^2 + y^2)^2 = 4x(x^2 - y^2)$.]

Esercizio 4.4: Data la curva di equazione cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = 2xy(x + y)$, determinare l'equazione polare e trovare una parametrizzazione.

Esercizio 4.5: Data la curva di equazione cartesiana $x^4 = 4(x^2 + y^2)$ con $x > 0$, determinare l'equazione polare. (È una metà della *curva di Clairaut*.)

[Soluzione: $\rho = \frac{2}{(\cos\theta)^2}$ per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.]

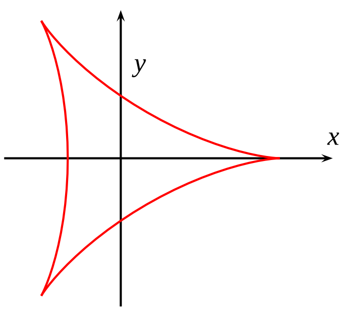
Esercizio 4.6: Data la curva parametrizzata da

$$u \mapsto \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right), \qquad -\infty < u < +\infty$$

determinarne le equazioni polare e cartesiana.

[Soluzione: È una circonferenza! $\rho = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.]

Esercizio 4.7: Data la curva di equazione cartesiana $(x^2 + y^2)^2 + 8x(x^2 - 3y^2) + 18(x^2 + y^2) - 27 = 0$ (detta *deltoide*), determinare una parametrizzazione e trovare i punti in cui non esiste una retta tangente.



[Soluzione: $t \mapsto (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.]

Esercizio 4.8: Scrivere la superficie S di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2)z^2 = 1$$

in coordinate cilindriche. Come si può semplificare quest'ultima equazione se si vuole rappresentare solo la falda della superficie contenuta nel semispazio $z > 0$?

[Soluzione: $\rho^2 z^2 = 1$, $z = 1/\rho$.]

Esercizio 4.9: Scrivere una rappresentazione parametrica della curva

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)z = 1, \\ x + y - z = 1, \end{cases}$$

[Soluzione: $z \mapsto \left(\frac{z-1+z^3+2z^2}{2z(z+1)}, \frac{z+1+z^3+2z^2}{2z(z+1)}, z\right)$.]

Esercizio 4.10: Scrivere una rappresentazione parametrica della curva

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)z^2 = 1, \quad z > 0 \\ x + y - z = 0, \end{cases}$$

[Soluzione: $t \mapsto \left(\frac{\cos t}{\sqrt{\cos t + \sin t}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t + \sin t}}, \sqrt{\cos t + \sin t}\right)$, $t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$.]

4.2 Curve descritte implicitamente

Esercizio svolto: Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$g_\alpha(x, y) = \alpha x^4 + y^4 - \alpha xy - x,$$

e l'insieme $Z_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_\alpha(x, y) = 0\}$

1. Si verifichi che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $(0, 0) \in Z_\alpha$ e $(1, 1) \in Z_\alpha$.
2. Si provi che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, Z_α è una curva regolare in un intorno (possibilmente dipendente da α) del punto $(0, 0)$ e del punto $(1, 1)$.
3. Trovare, se possibile, una retta tangente in $(0, 0)$ ad ogni insieme Z_α.
4. Trovare, se possibile, per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme Z_α è tangente alla curva $x^3 + y^4 = 2$ nel punto $(1, 1)$
5. E possibile determinare un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme Z_α è tangente alla curva $x^2 + y^2 = 2$ nel punto $(1, 1)$?

Svolgimento. **Punto 1**. Basta osservare che $g_\alpha(0, 0) = 0 = g_\alpha(1, 1)$ qualunque sia il valore di α.
Punto 2. Si ha

$$\nabla g_\alpha(x, y) = (4\alpha x^3 - \alpha y - 1\,,\, 4y^3 - \alpha x).$$

Dunque, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nabla g_\alpha(0, 0) = (-1, 0) \neq (0, 0)$ e $\nabla g_\alpha(1, 1) = (3\alpha - 1, 4 - \alpha) \neq (0, 0)$. L'affermazione segue dal Teorema del Dini.

Punto 3. La retta tangente a Z_α in $(0,0)$ deve risultare ortogonale al comune gradiente di g_α in $(0,0)$. Quindi essa è orizzontale e l'equazione è data da $y = 0$.

Punto 4. Si consideri $G(x,y) = x^3 + y^4 - 2$. Si ha che Z_α è tangente alla curva $G(x,y) = 0$ se e soltanto se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\nabla g_\alpha(1,1) = \lambda \nabla G(1,1)$. Questa condizione si può scrivere sotto forma di sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha - 1 = 2\lambda \\ 4 - \alpha = 3\lambda \end{cases}$$

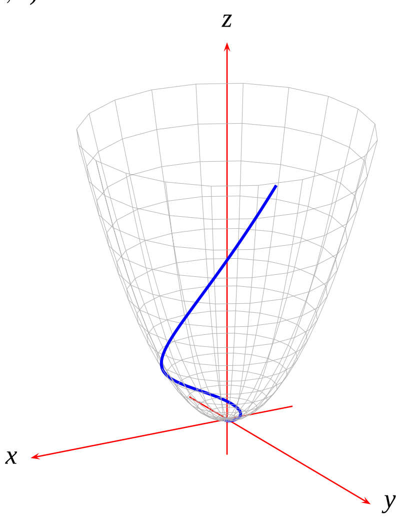
che ammette $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ come unica soluzione. Pertanto, $\alpha = 1$ è l'unico valore di α che soddisfa la condizione. (In altre parole, Z_1 è l'unica curva della famiglia Z_α che risulta tangente alla curva $G(x,y) = 0$ in $(1,1)$.)

Punto 5. Si consideri $\gamma(x,y) = x^2+y^2-2$. Si ha che Z_α è tangente alla curva $\gamma(x,y) = 0$ se e soltanto se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\nabla g_\alpha(1,1) = \lambda \nabla \gamma(1,1)$, cioè se e soltanto se è possibile risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3\alpha - 1 = 2\lambda \\ 4 - \alpha = 2\lambda \end{cases}$$

Come si vede, questo sistema ammette $\alpha = \frac{5}{4}$, $\lambda = 118$ come unica soluzione. Pertanto, la curva $Z_{\frac{5}{4}}$ è l'unica con la proprietà richiesta.

Esercizio svolto: Si consideri la curva che risulta dall'intersezione delle seguenti due superfici date in coordinate cilindriche $\zeta = \rho^2$, e $\theta = \ln \rho^2$. Se ne scriva una parametrizzazione e si calcoli il piano ortogonale alla curva nel punto $Q = (1,0,1)$.



Svolgimento. Cerchiamo una parametrizzazione usando le formule di conversione da cilindriche a cartesiane:

$$\begin{cases} x(\rho,\theta,\zeta) = \rho\cos\theta, \\ y(\rho,\theta,\zeta) = \rho\sin\theta, \\ z(\rho,\theta,\zeta) = \zeta \end{cases}$$

Sostituendo $\zeta = \rho^2$, e $e^{\frac{\theta}{2}} = \rho$ si ottiene subito la parametrizzazione cercata:

$$\varphi\colon \theta \mapsto \left(e^{\frac{\theta}{2}}\cos\theta, e^{\frac{\theta}{2}}\sin\theta, e^{\theta}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha il vettore tangente

$$\phi'(\theta) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\theta}{2} - \sin\theta\right) \\ e^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\sin\theta}{2} - \cos\theta\right) \\ e^{\theta} \end{pmatrix}.$$

Sia $P = (x,y,z)$ un generico punto del piano cercato. I vettori della forma $P - \phi(\theta)$ devono essere ortogonali a $\phi'(\theta)$. Cioè

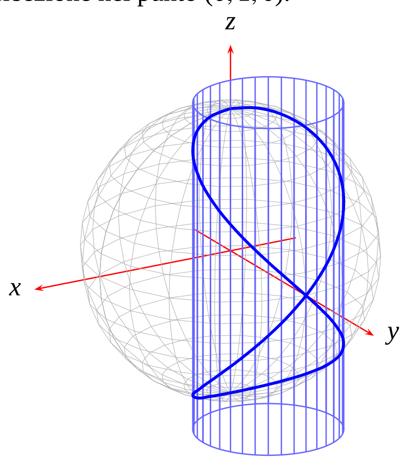
$$\begin{pmatrix} x - e^{\frac{\theta}{2}}\cos\theta \\ y - e^{\frac{\theta}{2}}\sin\theta \\ z - e^{\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\theta}{2} - \sin\theta\right) \\ e^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\sin\theta}{2} - \cos\theta\right) \\ e^{\theta} \end{pmatrix} = 0.$$

In particolare, nel punto Q, corrispondente alla scelta $\theta = 0$,

$$\frac{1}{2}x - y + z - \frac{3}{2} = 0,$$

che è l'equazione del piano cercato.

Esercizio 4.11: Si consideri la curva ottenuta dall'intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e del cilindro $x^2+y^2-y = 0$ (detta *finestra di Viviani*). Determinarne una rappresentazione parametrica e determinare gli angoli formati dalla sua auto intersezione nel punto $(0,1,0)$.



[Soluzione: Curva: $t \mapsto (\sin t\cos t, (\sin t)^2, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Gli angoli sono retti.]

Esercizio 4.12: Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$g_\alpha(x,y) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2y - 1 + 2\alpha.$$

Si dimostri che per ogni α l'insieme

$$Z_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_\alpha(x,y) = 0\}$$

contiene il punto di coordinate $(1,0)$. Dopo avere osservato che Z_α è rappresentabile come una curva regolare, si determini α in modo tale che Z_α sia tangente in $(1,0)$ alla retta di equazione $y = x - 1$.

[Soluzione: $a = 0$.]

Esercizio 4.13: Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri $g_\alpha(x,y)$ e Z_α come nell'esercizio 4.12. Dopo avere osservato che Z_α è rappresentabile come una curva regolare in un intorno di $(1,0)$, si determini α in modo tale che Z_α sia ortogonale in $(1,0)$ alla retta di equazione $y = x - 1$.

[Soluzione: $a = 2$.]

Esercizio 4.14: Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y)^2 - zx = 0\}$. Si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

è tangente all'insieme S nel punto $(1,2,1)$.

[Soluzione: $\alpha = -5$.]

Esercizio 4.15: Scegliere α nell'esercizio 4.14 affinché v_α sia ortogonale a S.

[Soluzione: Impossibile.]

Esercizio 4.16: Sia S come nell'esercizio 4.14. Scegliere α e β affinché

$$v_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

sia ortogonale a S nel punto $(1,2,1)$.

[Soluzione: $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{2}{3}$.]

Esercizio 4.17: Sia C l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\int_x^{x^2+y} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + 2x = 0.$$

Si verifichi che C è il sostegno di una curva regolare in un intorno del punto $(0,0)$ e si trovi la retta tangente in quel punto.
Suggerimento. Usare il teorema del Dini.

[Soluzione: $y = x$.]

Esercizio 4.18: Nell'esercizio 4.17 si trovi la retta ortogonale a C nel punto $(0,0)$.

[Soluzione: $x + y = 0$.]

Esercizio 4.19: Sia $C \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme dei punti (x,y,z) che soddisfano l'equazione $g(x,y,z) = 0$, con $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$g(x,y,z) = (x^2 + 2y - z\,,\, 4x - y^2 + z).$$

Si verifichi che C è il sostegno di una curva regolare in un intorno del punto $P = (1,1,3)$ e si detemini il piano ortogonale a C in P.
Suggerimento. La prima parte della tesi segue dal teorema del Dini dal momento che i vettori $\nabla g_1(1,1,3)$ e $\nabla g_2(1,1,3)$ sono linearmente indipendenti. Per trovare il piano richiesto si può procedere, ad esempio, in tre modi: (1) Si determina una parametrizzazione della curva e la si usa per trovare un vettore $\vec{v}$ tangente a C in P. Il piano allora sarà dato dalla formula $(\mathbf{x} - P)\cdot\vec{v} = 0$, dove $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$. (2) Si osserva che C è l'intersezione delle due superfici di equazione $g_1(x,y,z) = x^2 + 2y - z = 0$ e $g_2(x,y,z) = 4x - y^2 + z = 0$; allora l'equazione del piano cercato è data dalla formula $(\mathbf{x} - P)\cdot(\nabla g_1(1,1,3) \wedge \nabla g_2(1,1,3)) = 0$. (3) Come nel caso 2, il piano cercato si ottiene imponendo che i vettori (colonna) $x - P$, $\nabla g_1(1,1,3)$ e $\nabla g_2(1,1,3)$ siano linearmente dipendenti. Equivalentemente, il rango della matrice formata da questi tre vettori sia strettamente minore di 3; vale a dire

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & \frac{\partial}{\partial x}g_1(1,1,3) & \frac{\partial}{\partial x}g_2(1,1,3) \\ y-1 & \frac{\partial}{\partial y}g_1(1,1,3) & \frac{\partial}{\partial y}g_2(1,1,3) \\ z-3 & \frac{\partial}{\partial z}g_1(1,1,3) & \frac{\partial}{\partial z}g_2(1,1,3) \end{pmatrix} = 0.$$

[Soluzione: $2x - 3y - 6z + 19 = 0$.]

Esercizio 4.20: Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti (x,y) tali che $x^2 - 3xy - 1 = 0$. Per ogni $P_0 = (x_0,y_0) \in C$ determinare il punto $q(x_0,y_0)$ di intersezione della retta tangente a C in P_0 con l'asse $y = 0$.

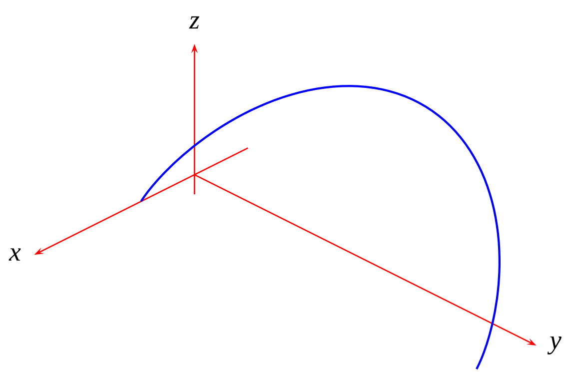
[Soluzione: $q(x_0,y_0) = \frac{2x_0^2 - 4x_0y_0}{2x_0 - y_0}$.]

4.3 Problemi geometrici

Esercizio svolto: Si consideri la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (\cos t\,,\; t - \sin t, 1 - \cos t),\;\; t \in [0, 2\pi].$$

Determinare la massima distanza dal piano xz dei punti del sostegno di γ.



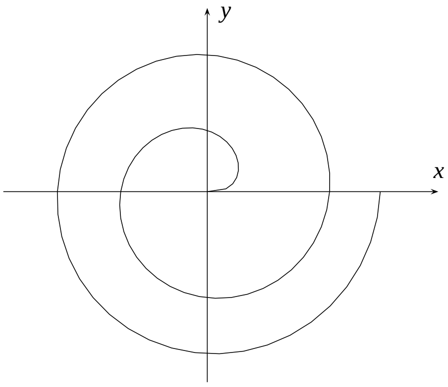
Svolgimento. La distanza $d(t)$ del punto $\gamma(t)$ dal piano xz è data semplicemente da $d(t) = t - \sin t$. Studiamo la funzione d nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ha $d'(t) = 1 - \cos(t)$, quindi

$d'(t) > 0$ per $t \in (0, 2\pi)$. Allora il massimo di d è dato da $d(2\pi) = 2\pi$.

Esercizio svolto: Si consideri la curva C in coordinate polari

$$\rho^2 = 4\theta, \quad \theta \geq 0.$$

(Spirale di Fermat.) Si ricavi una rappresentazione parametrica e si scriva la retta tangente nel punto $P = (0, \sqrt{2\pi})$.



Svolgimento. Dal momento che

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta, \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin\theta, \end{cases}$$

sostituendo $\rho = 2\sqrt{\theta}$, otteniamo che $(x, y) \in C$ se e soltanto se $(x, y) = \varphi(\theta)$ con

$$\varphi(\theta) = \left(2\sqrt{\theta}\cos\theta, 2\sqrt{\theta}\sin\theta\right).$$

Il punto P corrisponde, con questa parametrizzazione, a $\theta = \pi/2$. Il vettore tangente in P è, dunque,

$$\varphi'(\pi/2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2\pi} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

e la retta tangente è data da $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}x + \sqrt{2\pi}(y - \sqrt{2\pi}) = 0$.

Esercizio svolto: Sia $P \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti di intersezione della curva C, data in coordinate polari da

$$\rho = \frac{3\theta}{1+\theta}, \quad \theta \geq 0,$$

e della retta r di equazione $x = y$. Determinare P ed i punti di accumulazione di P.

Svolgimento. Calcoliamo i punti di intersezione tra r e C. Osserviamo che C può essere descritta parametricamente da

$$\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = \left(\frac{3\theta}{1+\theta}\cos\theta, \frac{3\theta}{1+\theta}\sin\theta\right).$$

I punti di intersezione si ottengono ponendo $x(t) = y(t)$ da cui segue $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{4} + (k-1)\pi$ per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (ricordiamo che $\theta \geq 0$). Allora i punti d'intersezione si rappresentano con le formule

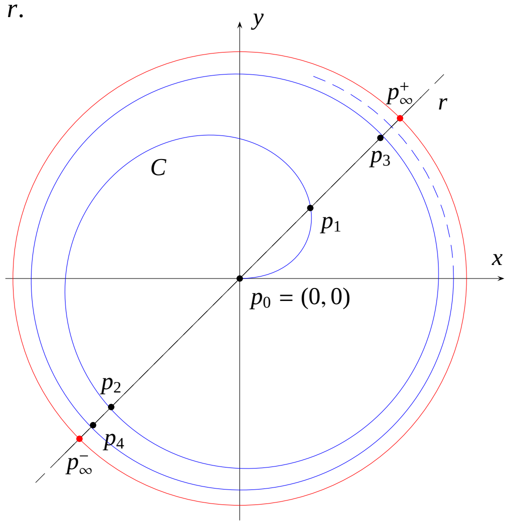
$$\begin{aligned} p_0 &= (0,0), \\ p_k &= \frac{(4k-3)\pi}{4+(4k-3)\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right), \\ &\qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Osserviamo che le due successioni $\{p_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{p_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti. Allora, i punti di accumulazione sono

$$p_\infty^- = \lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = \left(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$p_\infty^+ = \lim_{n\to\infty} p_{2n} = \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Osserviamo che i punti $p_\infty^\pm$ potevano essere ottenuti in modo molto semplice tramite considerazioni geometriche. Infatti, dal momento che $\frac{3\theta}{1+\theta} \to 3$ per $\theta \to +\infty$, si vede che $(x(\theta), y(\theta))$ si avvicina alla circonferenza di centro l'origine e raggio 3 (in rosso nel disegno) quando θ tende a $+\infty$. Quindi $p_\infty^\pm$ sono i punti di intersezione di questa circonferenza con la retta r.



Esercizio svolto: Si consideri la seguente famiglia di rette $r_{\alpha,\beta}$ di equazione

$$\alpha x + \beta y = 1 \qquad \text{con } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Si determini una curva che tocca (tangenzialmente) ognuna delle rette $r_{\alpha,\beta}$. *(Una tale curva, se esiste, è detta* ***invilupp*** *della famiglia data)*.

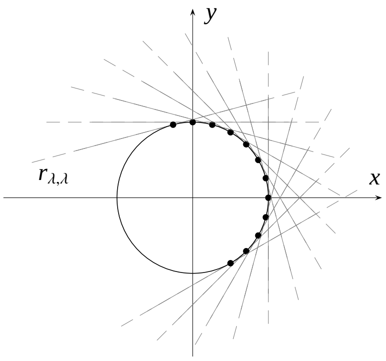
Svolgimento. La condizione $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ci permette di eliminare un parametro. Basta, per esempio, porre $\alpha = \cos\lambda$ e $\beta = \sin\lambda$ con $\lambda \in [0, 2\pi)$. In questo modo l'insieme di rette considerato è la famiglia ad un parametro di rette $r_{\cos\lambda,\sin\lambda}$ di equazione

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda = 1.$$

Conviene introdurre la funzione $f(x, y, \lambda) = x\cos\lambda + y\sin\lambda - 1$. In questo modo la retta $r_{\cos\lambda,\sin\lambda}$ si può scrivere come $f(x, y, \lambda) = 0$.

Sia $\gamma : \lambda \mapsto (x(\lambda), y(\lambda))$ una curva che incontra la retta $r_{\cos\lambda,\sin\lambda}$ in $(x(\lambda), y(\lambda))$. Allora

$$x(\lambda)\cos\lambda + y(\lambda)\sin\lambda = 1 \qquad (\spadesuit)$$



Vogliamo anche che γ sia tangente ad ognuna delle rette $r_{\cos\lambda,\sin\lambda}$ in $(x(\lambda), y(\lambda))$, cioè vogliamo che

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(\lambda) \\ y'(\lambda) \end{pmatrix} = 0 \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

D'altra parte l'equazione $(\spadesuit)$ equivale a $f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$. Derivando rispetto a λ, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda)x'(\lambda) + \frac{\partial}{\partial y} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda)y'(\lambda) + \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0$$

e dunque, tenendo conto della $(\spadesuit\spadesuit)$,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} f(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0. \qquad (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$$

Possiamo ottenere le funzioni $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ dalle equazioni $(\spadesuit)$ e $(\spadesuit\spadesuit\spadesuit)$. Infatti, nel nostro caso, queste si riducono al sistema (per semplicità omettiamo la dipendenza esplicita di x e y da λ):

$$\begin{cases} x\cos\lambda + y\sin\lambda = 1, \\ -x\sin\lambda + y\cos\lambda = 0. \end{cases}$$

Otteniamo $x(\lambda) = \cos\lambda$ e $y(\lambda) = \sin\lambda$. In altre parole la curva cercata è il cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Esercizio 4.21: Si consideri la curva $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\phi(t) = (3\cos(2\pi t), 4\sin(\pi t), \sin(2\pi t) + 2\pi t)$$

Calcolare $\|\phi'(t)\|$. Determinare inoltre t_0 affinché

$$\phi'(t_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

[Soluzione: $\|\phi'(t)\| = 4\sqrt{2}\pi\left|\cos(\pi t)\right|$, $t_0 = \frac{2k+1}{2}$ per $k = 0, 1, \ldots$.]

Esercizio 4.22: Consideriamo la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (t, t^2 - 2t, t^3 - 3t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sostegno di γ è tangente al piano per $\gamma(t)$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Suggerimento. La condizione di appartenenza al piano è

$$0 = \det(v_1|v_2|\gamma'(t)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \gamma_1'(t) \\ 0 & 1 & \gamma_2'(t) \\ 0 & 0 & \gamma_3'(t) \end{pmatrix}$$

[Soluzione: $t = 0$ e $t = 2$.]

Esercizio 4.23: Si consideri la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (t - t^2, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il piano ortogonale alla curva nel punto $\gamma(t)$ è parallelo al piano di equazione $x - 2y - 3z = 0$.
Suggerimento. È la stessa cosa chiedere che $\gamma'(t)$ sia ortogonale al piano $x - 2y - 3z = 0$ o, equivalentemente, che $\gamma'(t)$ sia parallelo al vettore $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^T$. Ovvero

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 - 2t & 1 \\ 2t & -2 \\ 3t^2 & -3 \end{pmatrix} = 1.$$

[Soluzione: $t = 1$.]

Esercizio 4.24: Nell'esercizio precedente, si calcoli il piano ortogonale all sostegno della curva nel punto $\gamma(-1)$

[Soluzione: $3x - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$.]

Esercizio 4.25: Consideriamo la superficie S di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2)z^2 = 1$$

per $z > 0$. Determinarne una parametrizzazione e trovare la direzione normale in ogni punto di S (espresso mediante la parametrizzazione). Trovare, in particolare, la direzione normale nel punto $(1, 1, 1/2)$.

[Soluzione: Parametrizzando la superficie usando le coordinate cilindriche (esercizio 4.8) si ottiene

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \frac{1}{\rho})$$

con $\rho \in (0, +\infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. La direzione normale è data dal vettore

$$\varphi_\rho(\rho, \theta) \times \varphi_\theta(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\cos\theta \\ \frac{1}{\rho}\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(1,1,1/2) = \varphi(2, \frac{\pi}{4})$ la direzione normale è quella del vettore di componenti $\sqrt{2}/4$, $\sqrt{2}/4$, $1/2$. .]

Esercizio 4.26: Si consideri la curva ottenuta dall'intersezione delle superfici di equazione $z + x^2 - y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$. Se ne determini una parametrizzazione e si scriva l'equazione del piano ortogonale alla curva in ogni suo punto.

Esercizio 4.27: Si consideri la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\gamma(t) = \left(t, t^2\right).$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $\left(\begin{smallmatrix}-2\\a\end{smallmatrix}\right)$ è ortogonale alla curva nel punto $P = (1,1)$?

[Soluzione: $a = 1$.]

Esercizio 4.28: Si consideri la curva $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\delta(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$$

trovare il piano ortogonale a δ nel punto $P = (1,1,1)$.

[Soluzione: $x + 2y + 3z = 6$.]

Esercizio 4.29: Si consideri la superficie parametrizzata $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma(u,v) = \left(u, u+v, v^2\right).$$

Trovare un vettore ortogonale a σ nel punto $P = (1,2,1)$.

[Soluzione: $\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$.]

Esercizio 4.30: Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = x + 2y^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Determinare il piano passante per il punto $Q = (0,0,-2)$ e parallelo al piano tangente al grafico di f nel punto $P = (1,1,3)$.

[Soluzione: $x + 4y - z = 2$.]

Esercizio 4.31: Si consideri la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(t) = \left(t, t^3 - t, \arctan(t)\right).$$

Determinate il piano per $\gamma(1)$ tangente a γ e parallelo al vettore $\gamma''(1)$.

[Soluzione: $4x - y - 6z = 4 - \frac{3}{2}\pi$.]

Esercizio 4.32: Si consideri la curva $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\delta(t) = \left(t, t^2, t^3\right).$$

Sia inoltre Π il piano di equazione $3x + 3y + z = 5$. Determinare per quale valore di t il piano per $\delta(t)$, tangente a δ e parallelo a $\delta''(t)$ risulta anche parallelo al piano Π.

[Soluzione: $t = -1$.]

Esercizio 4.33: Si consideri la curva $\sigma\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma(t) = \left(t, t^3, t^2\right).$$

Calcolare, in dipendenza da t il punto di intersezione $p(t)$ del piano $z = 0$ con la retta tangente in $\sigma(t)$ al sostegno di σ.

[Soluzione: $p(t) = (0, t^3 - 2t^2, 0)$.]

Esercizio 4.34: Sia σ come nell'esercizio 4.33 e sia $q(t)$ il punto di intersezione del piano $y = 0$ con la retta tangente in $\sigma(t)$ al sostegno di σ. Determinare per quale valore di t la distanza di $q(t)$ dall'origine è massima.

Suggerimento. Procedendo come nell'esercizio 4.33 si ottiene $q(t) = (\frac{2}{3}t, 0, \frac{1}{3}t^2)$.

[Soluzione: $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$.]

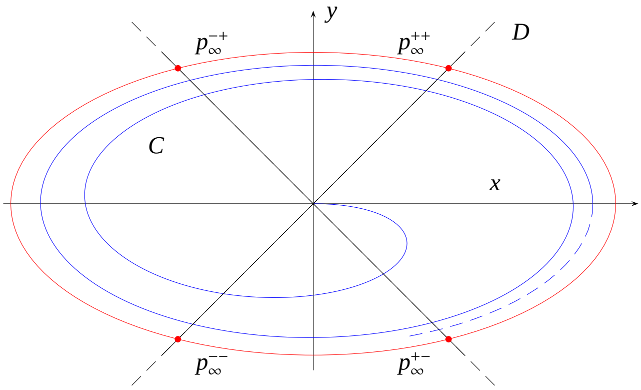
Esercizio 4.35: Sia $q(t)$ come nell'esercizio 4.34. Calcolare la lunghezza della curva $t \mapsto q(t)$ per $t \in [1,2]$.

[Soluzione: $-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\ln(\sqrt{5}-2)$.]

Esercizio 4.36: Sia $P \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti di intersezione della curva C, parametrizzata da

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{4\theta}{1+\theta}\cos\theta, \frac{2\theta}{1+\theta}\sin(-\theta)\right), \quad \theta \geq 0,$$

e della curva D di equazione cartesiana $x^2 = y^2$. Determinare P ed i suoi punti di accumulazione.



Suggerimento. D è unione delle due rette di equazioni $x+y$ e $x = -y$ es si può anche caratterizzare con l'equazione $|x| = |y|$. I punti di intersezione, oltre all'origine, si trovano risolvendo l'equazione:

$$|2\cos\theta| = |\sin\theta|.$$

(ricordiamo che $|\sin(-\theta)| = |-\sin\theta| = |\sin\theta|$). Con qualche calcolo, si vede che i valori cercati di θ formano una successione $\{\theta_k\}$ data da $\theta_0 = 0$ e $\theta_k = \arctan(2) + \frac{\pi}{2}(k-1)$ per $k = 1, 2, \ldots$. Si noti inoltre che $\cos(\arctan 2) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\arctan 2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\arctan(2+\pi/2)) = \frac{-2\sqrt{5}}{5}, \ldots$

[Soluzione: I punti di intersezione sono dati da $p_k = \sigma(\theta_k)$. I punti di accumulazione sono 4: $\left(\pm\frac{4}{5}\sqrt{5}, \pm\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)$.]

Esercizio 4.37: Si consideri la seguente famiglia ad un parametro di rette r_t di equazione $2ty - 2x = t^2$. Si determini una curva che tocca (tangenzialmente) ognuna delle rette r_t.

Suggerimento. Supponendo che $t \mapsto (x(t), y(t))$ *sia una curva con le proprietà richieste, si ricavano condizioni su* x *e* y*. Questo permette di ricavare una rappresentazione parametrica (in termini di* t*) della curva cercata. Si può poi eliminare il parametro* t*.*

[Soluzione: La parabola di equazione $x = -y^2$.]

Esercizio 4.38: Si consideri la famiglia delle rette ortogonali alla parabola $y = x^2$. Si determini una curva che tocca (tangenzialmente) ognuna di queste rette.

Suggerimento. Parametrizzare la parabola con $t \mapsto (t, t^4)$*. La retta ortogonale alla parabola nel punto* (t, t^2) *ha equazione* $x + 2ty - 2t^3 - t = 0$*. Procedere come nell'esercizio 4.37 senza eliminare il parametro.*

[Soluzione: La curva parametrizzata $t \mapsto \left(t^3 - 6t^2, \frac{1}{2}(6t-1)\right)$.]

Esercizio 4.39: Si consideri la famiglia delle rette ortogonali alla parabola $xy = 1$. Si determini una curva che tocca (tangenzialmente) ognuna di queste rette.

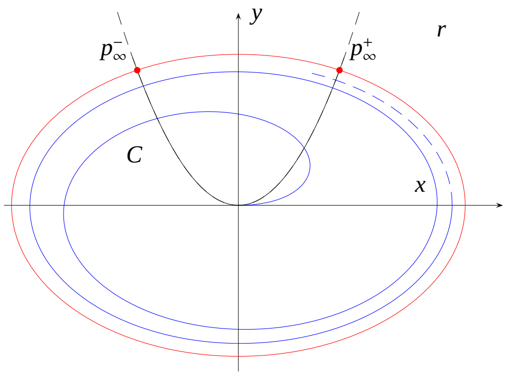
Suggerimento. Procedere come nell'esercizio 4.38.

[Soluzione: La curva parametrizzata $t \mapsto \left(\frac{1+3t^4}{2t^3}, \frac{3+t^4}{2t}\right)$.]

Esercizio 4.40: Sia $P \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti di intersezione della curva C, parametrizzata da

$$\theta \mapsto \left(\frac{3\theta}{1+\theta}\cos\theta, \frac{2\theta}{1+\theta}\sin\theta\right), \qquad \theta \geq 0,$$

e del grafico della funzione $x \mapsto x^2$. Determinare i punti di accumulazione di P.



Suggerimento. Usare considerazioni geometriche al limite, non *tentare di calcolare esplicitamente i punti di intersezione (è possibile ma non richiesto dal problema)*

[Soluzione: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{-1+\sqrt{82}}, \frac{2}{9}(-1+\sqrt{81})\right)$.]

Esercizio 4.41:

Si consideri la seguente famiglia ad un parametro di parabole p_t di equazione $x^2 + ty - t^2 + t = 0$. Si determini una curva che tocca (tangenzialmente) ognuna delle rette p_t.

Suggerimento. Si veda l'esercizio 4.37.

[Soluzione: La retta di equazione $x = 0$.]

Capitolo 5

Integrali curvilinei

Si veda anche la parte sugli integrali multipli.

5.1 Integrali curvilinei rispetto al parametro d'arco

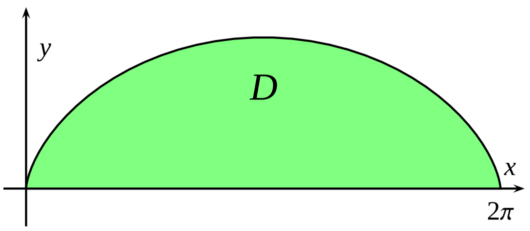
Esercizio svolto: Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial D} \big| |y| - 1 \big| \, \mathrm{d}s,$$

dove D è il dominio piano delimitato dall'arco di cicloide

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

e dall'asse x.



Svolgimento. L'integrale lungo il segmento che unisce l'origine con il punto $(2\pi, 0)$ vale evidentemente 2π. Rimane solo da calcolare l'integrale lungo l'arco di cicloide. Si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right|.$$

Quindi,

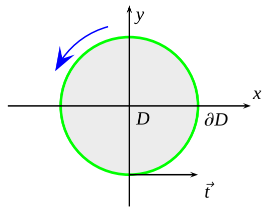
$$\begin{aligned} \int_\gamma \big| |y| - 1 \big| \, \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \left| \cos t \sin \frac{t}{2} \right| \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| 2 \left(\cos \frac{t}{2} \right)^2 - 1 \right| \left| \sin \frac{t}{2} \right| \mathrm{d}t = \frac{16 - 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Il valore cercato è, allora $\frac{16-4\sqrt{2}}{3} + 2\pi$.

Esercizio svolto: Sia f il campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ dato da

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -xy^2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\partial D} f \cdot \vec{t} \, \mathrm{d}s$, dove D è il disco $x^2 + y^2 = 1$ e $\vec{t}(x, y)$ è il versore tangente a ∂D orientato come in figura.



Svolgimento. Posto $A(x, y) = x^2 y$ e $B(x, y) = -xy^2$, si ha per il teorema di Gauss-Green

$$\int_{\partial D} f \cdot \vec{t} \, \mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\iint_D (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Con una trasformazione in coordinate polari otteniamo

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\pi.$$

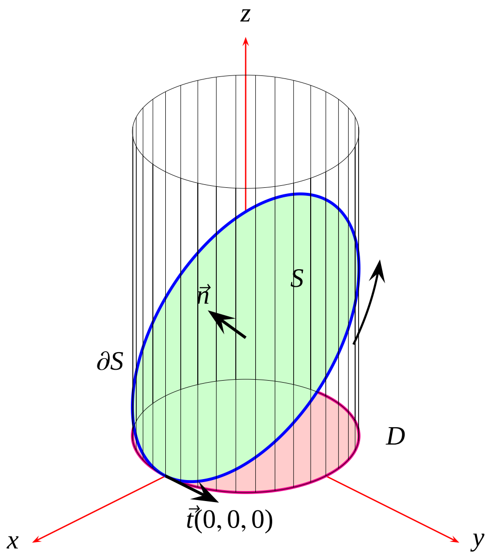
Dunque,

$$\int_{\partial D} f \cdot \vec{t} \mathrm{d}s = -\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio svolto: Sia f il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\partial S} f \cdot \vec{t} \mathrm{d}S$, dove S è l'intersezione tra il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ ed il piano di equazione $x + z = 1$ e $\vec{t}(x, y, z)$ è il versore tangente a ∂S orientato come nella seguente figura.



Svolgimento. Per il teorema di Stokes si ha

$$\int_{\partial S} f \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}S = \iint_S \operatorname{rot} f \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

dove $\vec{n}(x, y, z)$ è il versore normale alla superficie con l'orientazione scelta. Parametrizziamo S mediante la funzione $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - u)$ con $u^2 + v^2 \leq 1$. Come si verifica immediatamente,

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ha,

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Allora,

$$\iint_S \operatorname{rot} f \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_S \mathrm{d}S = \frac{2}{\sqrt{2}} |S|$$

dove $|S|$ è l'area di S, cioè $\sqrt{2}\pi$ (infatti S è un'ellisse di semiassi $\sqrt{2}$ e 1). Di conseguenza

$$\int_{\partial S} f \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s = 2\pi.$$

Esercizio 5.1: Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie

$$\int_\gamma x + y\,\mathrm{d}s$$

dove γ è la frontiera del triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Esercizio 5.2: Calcolare il seguente integrale di linea:

$$\int_\gamma 5x + y + 1\ \mathrm{d}s$$

dove $\gamma(t) = (t, 1 - t, t^2 + t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Esercizio 5.3: Calcolare il seguente integrale di linea:

$$\int_\gamma x + 5y + 1\ \mathrm{d}s$$

dove $\gamma(t) = (1 - t, t, t^2 + t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Esercizio 5.4: Calcolare

$$\iint_{\partial D} \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}s,$$

dove D è la parte del semidisco

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\,,\ y \geq 0\}$$

compresa tra le rette di equazione $x = y$ e $x = -y$.

Esercizio 5.5: Calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{x}\ \mathrm{d}s$$

dove γ è data da

$$\gamma(t) = (t^2, t \sin t, t \cos t), \qquad -\pi \leq t \leq \pi,$$

Esercizio 5.6: Calcolare

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_r} 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s\,,$$

dove $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$.

Suggerimento. Osservare che, fissato $\varepsilon > 0$, per r sufficiente mente grande, la funzione integranda è maggiore di $1 - \varepsilon$; quindi mostrare che per tali valori di r l'integrale è maggiore di $2\pi r(1 - \varepsilon)$.

[Soluzione: $+\infty$.]

Esercizio 5.7: Sia E un esagono (pieno) circoscritto al cerchio di centro l'origine e raggio r. Sia inoltre f il campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$ dato da

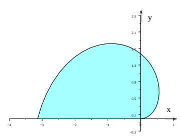
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\partial E} f \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s$, dove ∂E è orientato in senso orario.

[Soluzione: $6r^2\sqrt{3}$.]

5.2 Grandezze geometriche e fisiche

Esercizio svolto: Trovare l'area della parte di piano limitata dall'immagine della curva $\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, e dall'asse x.



Svolgimento. Sia γ_1 l'arco di curva sopra specificata. Esso incontra l'asse x in $(-\pi, 0)$ ed in $(0, 0)$. Sia γ_2 il segmento congiungente $(-\pi, 0)$ a $(0, 0)$. L'area richiesta è data da

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

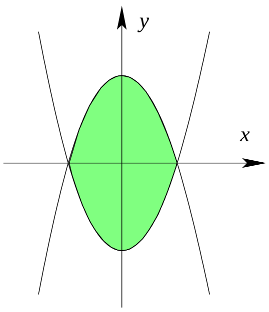
Si vede subito che il secondo integrale vale 0. Per quanto riguarda il primo, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\cos t(\sin t + t\cos t) \\ &\qquad - t\sin t(\cos t - t\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}\end{aligned}$$

Esercizio svolto: Calcolare la lunghezza del bordo del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + |y| \leq 1\}$$

Svolgimento. Il dominio D è la parte di piano racchiusa tra le due parabole (simmetriche rispetto all'asse x) di equazione $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$ (vedere figura) che si incontrano nei punti $(-1, 0)$, $(1, 0)$. La lunghezza dell'arco di parabola superiore è data da:



$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$$

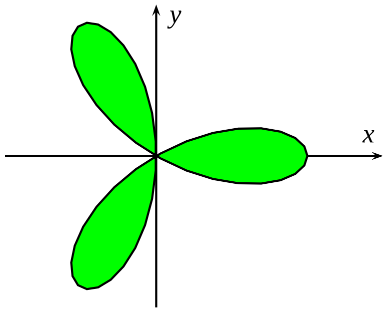
dove $f(x) = 1 - x^2$. Ne segue che la lunghezza di ∂D è $L = 2\left(\sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5} - 2)\right)$.

Esercizio svolto: Calcolare l'area della parte D di piano racchiusa dalla curva rappresentata parametricamente da

$$\varphi(\theta) = (\cos\theta\cos(3\theta), \sin\theta\cos(3\theta)), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Svolgimento. Applicando le formule di Gauss-Green e tenendo conto dell'orientazione si ottiene che

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\varphi} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(3\theta)^2\Big((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(3\theta))^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$



Il dominio D è in verde e il sostegno di φ in nero.

Esercizio svolto: Sia F il campo vettoriale piano dato da

$$F(x, y, z) = (x - y^2\,,\ 2xy + e^x).$$

Determinare il flusso uscente di F attraverso la frontiera del triangolo D di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$.
Svolgimento. Il flusso cercato è dato da

$$\int_{\partial D} \vec{n} \cdot F\,\mathrm{d}s.$$

Dove $\vec{n}$ denota la normale esterna alla frontiera di D. Per il Teorema della Divergenza nel piano si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \vec{n} \cdot F\,\mathrm{d}s &= \iint_D \operatorname{div} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{2-2y} (1 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

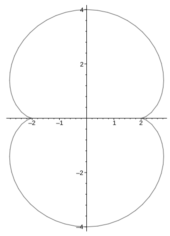
Esercizio 5.8: Considerata la curva $t \mapsto \gamma(t)$ data da

$$\gamma(t) = (3\cos t - \cos(3t), 3\sin t - \sin(3t)), \ t \in [-\pi, \pi],$$

determinare l'area della parte D di piano racchiusa dalla curva.

Suggerimento. La curva γ è rappresentata nella figura a fianco. Ricordare che, se $k \neq n$ sono numeri interi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0.$$



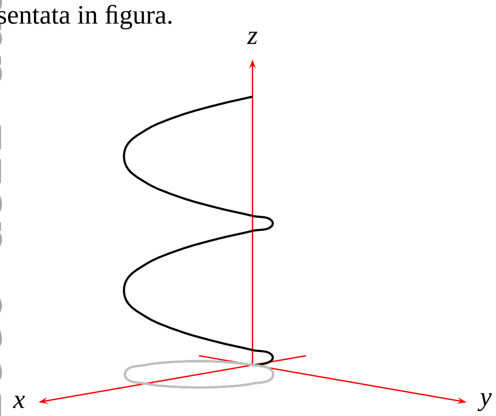
Esercizio 5.9: Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f_a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f_a(x) = \cosh(x + a)$. Determinare per quale valore di a il grafico di f_a ha lunghezza minima.

[Soluzione: $a = -\frac{1}{2}$.]

Esercizio 5.10: Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di un filo di spessore trascurabile e dotato di densità lineare ρ costante, disposto nello spazio lungo la curva

$$\phi(\theta) = (1 - \cos\theta, \sin\theta, \theta), \quad \theta \in [0, 6\pi],$$

rappresentata in figura.



Per motivi grafici le proporzioni lungo l'asse z sono state alterate. La curva in grigio è la proiezione del sostegno di ϕ sul piano $z = 0$.

[Soluzione: $12\sqrt{2}\pi\rho$.]

Esercizio 5.11: Calcolare il flusso uscente dal disco unitario centrato nell'origine del campo vettoriale piano dato da

$$F(x, y) = \left(x - \frac{y}{2}, y - \frac{x}{2}\right).$$

[Soluzione: 2π.]

Esercizio 5.12: Calcolare l'area del dominio D di $\mathbb{R}^2$ racchiuso dalla curva γ rappresentata parametricamente da:

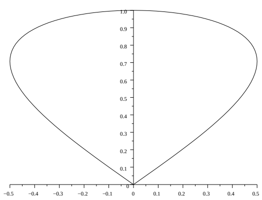
$$\varphi(t) = (\cos t \sin t, \sin t) \quad t \in [0, \pi].$$

(Nota: γ è il sostegno della curva mentre φ è la parametrizzazione. Le due cose non devono essere confuse.)

Suggerimento. Per le formule di Gauss-Green, con l'orientazione data da φ, si ha:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\varphi,$$

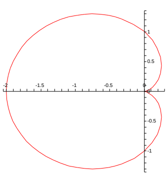
dove $\boldsymbol{v}$ è il campo (definito lungo γ) dato da $\boldsymbol{v} : (x, y) \mapsto (-y, x)$.



L'immagine della curva φ.

Esercizio 5.13: Calcolare l'area della parte di piano racchiusa dalla curva rappresentata parametricamente da

$$\sigma(t) = ((1 - \cos t)\cos t, (1 - \cos t)\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$



Esercizio 5.14: Calcolare la lunghezza dell'immagine della curva $\phi\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, data da

$$\phi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

[Soluzione: $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$.]

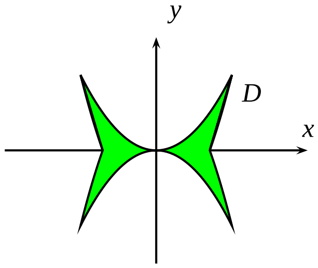
Esercizio 5.15: Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, data da

$$\gamma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t)$$

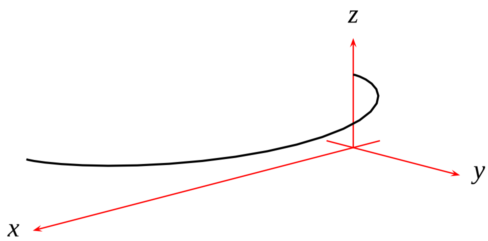
[Soluzione: $\frac{5\sqrt{5}-8}{3}$.]

Esercizio 5.16: Calcolare la lunghezza del bordo del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 1 \leq |y| \leq x^2\}$$



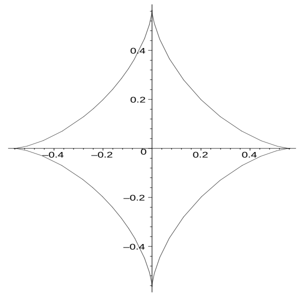
Esercizio 5.17: Calcolare il centro di massa di un filo avente densità costante $\rho(x, y, z) = 1$ giacente sul supporto della curva $\phi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da $\phi(t) = (2(t - \sin t), 2(1 - \cos t), 2)$.



Esercizio 5.18: Calcolare l'area delimitata dalla curva

$$t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos t)^3, \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin t)^3\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

La curva è rappresentata nella figura qui a fianco. Si raccomanda l'uso delle formule per l'area che seguono da Gauss-Green.



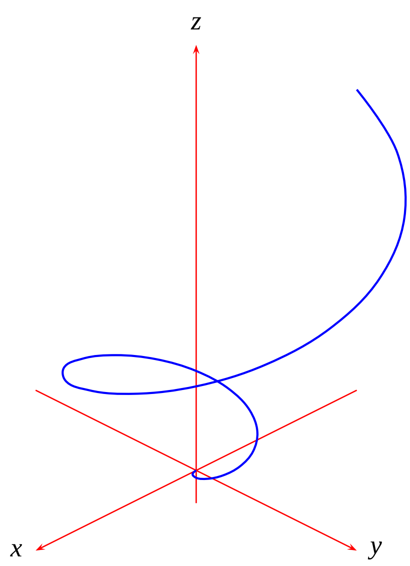
Come cambia il risultato se si prende la curva

$$t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{3\pi}}(\cos t)^3, \frac{1}{\sqrt{3\pi}}(\sin t)^3\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

al posto di quella considerata sopra?

Esercizio 5.19: Calcolare la lunghezza della curva di $\mathbb{R}^3$ rappresentata parametricamente da:

$$t \mapsto \left(t\cos t\,,\ t\sin t,\ \frac{t^2}{2}\right), \qquad t \in [0, 3\pi]$$



Il sostegno della curva. Le proporzioni tra gli assi sono state alterate per maggiore chiarezza.

Esercizio 5.20: Calcolare la massa di un filo avente densità variabile $\rho(x, y, z) = 2\sqrt{2z}$ disposto lungo l'immagine (sostegno) della curva in $\mathbb{R}^3$, $\phi(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2/2)$, con $t \in [0, 2\pi]$. (Si veda anche l'esercizio precedente.)

Esercizio 5.21: Calcolare il centro di massa di un filo sottile disposto lungo una circonferenza in $\mathbb{R}^2$ di raggio 3 e centro l'origine la cui densità variabile ubbidisce alla legge $\rho(x, y) = 3 + x$.

Esercizio 5.22: Calcolare la lunghezza della curva di $\mathbb{R}^2$ rappresentata parametricamente da:

$$t \mapsto (t\cos t\,,\ t\sin t), \qquad t \in [0, \pi] \qquad \text{(Spirale di Archimede)}$$

Suggerimento. Ricordare che

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

è una primitiva di $\sqrt{1+x^2}$.

Esercizio 5.23: Calcolare la massa di un filo avente rappresentazione parametrica

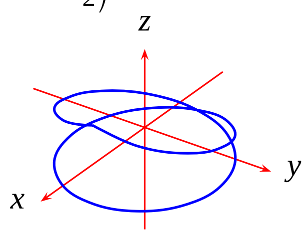
$$\gamma(t) = (t, \sin t, \cos t), \qquad -\pi \le t \le \pi,$$

e densità (lineare) $\rho(x, y, z) = |x| + 1$.

Esercizio 5.24: Si consideri un filo di densità (lineare) costantemente uguale a 2, disposto nello spazio lungo la curva parametrizzata

$$t \mapsto \left(\cos(2\pi t)\,,\ \sin(2\pi t),\ t^2 - \frac{1}{2}\right), \qquad t \in [-1, 1].$$

Calcolarne la lunghezza ed il momento di inerzia rispetto all'asse z.



Esercizio 5.25: Calcolare il seguente integrale di linea

$$I = \int_\gamma (x^2 + z^2)\,ds$$

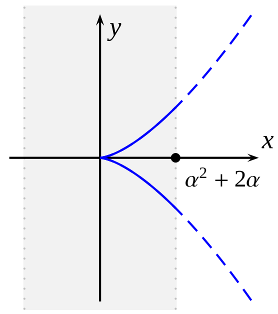
dove $\gamma(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t})$, $0 \le t \le 1$. (Tale integrale rappresenta il momento di inerzia della curva materiale γ, di densità costante, rispetto all'asse y.)

Esercizio 5.26: Dato $\alpha > 0$ sia L_α la lunghezza della parte di curva di equazione cartesiana

$$9y^2 = 4x^3$$

contenuta nella striscia

$$S_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \alpha^2 + 2\alpha\}$$



[Soluzione: $L_\alpha = \frac{4}{3}\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 3)$.]

Esercizio 5.27: Calcolare sia la lunghezza ℓ della curva nell'esercizio 4.7 che l'area A della parte di piano da essa racchiusa.

[Soluzione: $\ell = 16$, $A = 2\pi$.]

5.3 Lavoro, campi vettoriali e forme differenziali

Esercizio svolto: Dato, in $\mathbb{R}^2$, il campo di forze

$$F(x, y) = (x^2 - y\,,\ 1 - x),$$

Determinare il lavoro (del campo) necessario per spostare un punto lungo la curva γ parametrizzata da:

$$t \mapsto (t\cos t, t\sin t), \qquad \pi/2 \le t \le 4\pi.$$

Svolgimento. Si deve calcolare

$$\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y.$$

Siano F_1 ed F_2 le componenti del campo vettoriale F lungo l'asse x e y rispettivamente. Poiché il dominio di F è semplicemente connesso (è tutto $\mathbb{R}^2$) e poiché

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, si ha che F è conservativo. Dunque, per calcolare il lavoro possiamo scegliere un qualunque curva con gli stessi estremi. Scegliamone una particolarmente semplice: il segmento σ che unisce il primo estremo $(0, \frac{\pi}{2})$ al secondo $(4\pi, 0)$. Una parametrizzazione di σ è la seguente: $t \mapsto (4\pi t, (1-t)\frac{\pi}{2})$, $t \in [0, 1]$. Il lavoro è dato dal seguente integrale curvilineo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y &= \int_\sigma F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 4\pi(16\pi^2t^2 - (1-t)\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}(1-4\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{64}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio svolto: Dire se il campo vettoriale dato da $F(x,y,z) = (y+1, x-z, -y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$ e, se possibile, determinarne il potenziale che vale 0 nell'origine.

Utilizzare il potenziale appena trovato per calcolare il lavoro relativo allo spostamento di un punto lungo il segmento orientato γ congiungente il punto $(0, 0, 1)$ con $(2, 3, 1)$.

Svolgimento. Il dominio, $\mathbb{R}^3$ di F è semplicemente connesso. Inoltre, come si vede subito, $\operatorname{rot} F = 0$ in ogni punto di $\mathbb{R}^3$. Dunque F è conservativo.

Trovare un potenziale significa determinare una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. In particolare, deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y.$$

Quindi f deve essere della forma $f(x,y,z) = -yz + g(x,y)$. Dal momento che deve essere anche

$$x - z = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -z + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

si ottiene che $g(x,y) = xy + h(x)$. Dunque $f(x,y,z) = -yz + xy + h(x)$. Poiché, inoltre,

$$y + 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y + h'(x),$$

si ottiene $h(x) = x + c$ con c una costante arbitraria. Dunque,

$$f(x,y,z) = x - yz + xy + c$$

è un potenziale per ogni $c \in \mathbb{R}$. Se $c = 0$ si ha $f(0,0,0) = 0$ come richiesto.

Il lavoro richiesto si ottiene calcolando $f(2,3,1) - f(0,0,1) = 5$.

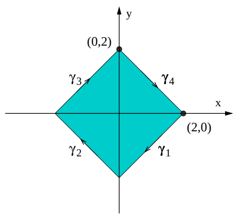
Esercizio svolto: Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\mathcal{I} = \oint_\gamma \frac{y}{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{|x|+|y|}\,\mathrm{d}y$$

dove γ è il bordo (percorso una sola volta, in senso orario) dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 2\}$$

Svolgimento. Il bordo dell'insieme D è caratterizzato dalla relazione $|x| + |y| = 2$. Tenendo conto di questo fatto e della proprietà di additività rispetto al cammino di integrazione si ottiene



$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \frac{y}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{2}\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \omega.$$

Dove si è posto $\omega(x,y) = \frac{y}{2}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{2}\,\mathrm{d}y$. Una parametrizzazione delle curve γ_i si può esprimere come segue:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: t \mapsto (2-2t, -2t),\ t \in [0,1]\\ \gamma_2 &: t \mapsto (-2t, -2+2t),\ t \in [0,1]\\ \gamma_3 &: t \mapsto (-2+2t, 2t),\ t \in [0,1]\\ \gamma_4 &: t \mapsto (2t, 2-2t),\ t \in [0,1]\end{aligned}$$

Dalla definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale si ottiene dunque:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 (2t + 2 - 2t)\,\mathrm{d}t = 2,$$
$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 (2 - 2t + 2t)\,\mathrm{d}t = 2,$$
$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 (2t + 2 - 2t)\,\mathrm{d}t = 2,$$
$$\int_{\gamma_4} \omega = \int_0^1 (2 - 2t + 2t)\,\mathrm{d}t = 2.m$$

Da cui segue $\mathcal{I} = 8$.

Svolgimento alternativo: Sul bordo di D

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\oint_\gamma y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y.$$

Quindi $\mathcal{I}$ è l'area del quadrato D che, come si vede, ha lato $2\sqrt{2}$. Pertanto $\mathcal{I} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

Esercizio svolto: Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la famiglia di campi vettoriali

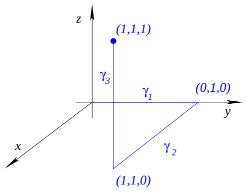
$$F_{\alpha,\beta}(x,y,z) = (ze^{zx} + \alpha^2 y\,,\ \alpha^2 x - \beta + z\,,\ xe^{zx} + y)$$

per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia inoltre $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\gamma(t) = \left(t\sqrt{2}\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right),\ t\sqrt{2}\sin\left(\frac{t\pi}{4}\right),\ t\tan\left(\frac{t\pi}{4}\right)\right).$$

Si determinino i valori di α e β affinché sia minimo il lavoro $L(\alpha,\beta)$ di F lungo γ, e che $\alpha + \beta = 1$.

Svolgimento. Il campo vettoriale F è irrotazionale e il suo dominio è semplicemente connesso. Allora F è conservativo e, dunque, il lavoro si può calcolare scegliendo una curva più comoda con gli stessi estremi. Per esempio, usando la curva in figura si ottiene



$$L(\alpha,\beta) = \alpha^2 - \beta + e.$$

Tenendo conto di $\alpha + \beta = 1$, il minimo di $L(\alpha,\beta)$ si ottiene per $(\alpha,\beta) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Esercizio svolto: Determinare tulle le funzioni $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = xy\,\mathrm{d}x + F(x,y)\,\mathrm{d}y$$

sia chiusa. Scegliere poi F in modo tale che $F(x,2x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Affinché ω sia chiusa, deve essere

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Integrando rispetto a x si ottiene

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + c(y)$$

dove c è una funzione della sola y (quindi costante rispetto a x).

Cerchiamo ora quella F per cui $F(x,2x) = 0$. Deve valere $F(x,2x) = x^2/2 + c(2x) = 0$, cioè $c(2x) = -x^2/2$. Questa relazione, visto che deve essere $x = y/2$, implica $c(y) = \frac{-y^2/4}{2} = -\frac{y^2}{8}$. Dunque

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8}.$$

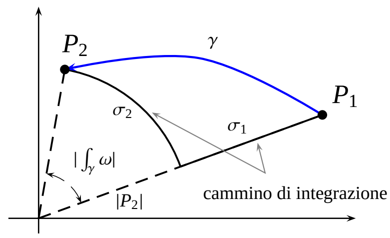
Esercizio svolto: Sia ω la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Dati due punti P_1 e P_2 ad un cammino γ che li unisce (da P_1 a P_2) e non abbraccia l'origine, calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

Svolgimento. Il lemma di Poincaré permette di sostituire la curva γ con una più conveniente per i calcoli. Ci spostiamo prima da P_1 lungo la semiretta per l'origine che passa per P_1 fino ad incontrare la circonferenza di raggio $|P_2|$ centrata nell'origine. Dal punto di intersezione ci muoviamo verso P_2 (si veda la figura seguente).



Calcoli relativamente semplici mostrano che

$$\int_{\sigma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\sigma_2} \omega = \theta_2 - \theta_1,$$

dove $P_i = (|P_i|\cos\theta_i, |P_i|\sin\theta_i)$ per $i = 1, 2$. Di conseguenza,

$$\int_\gamma \omega = \theta_2 - \theta_1.$$

In altre parole quest'integrale rappresenta una sorta di "distanza angolare" (vista dall'origine lungo la curva γ) di P_2 da P_1.

Esercizio 5.28: Calcolare il seguente integrale curvilineo (in $\mathbb{R}^2$):

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{p}\,,$$

dove $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ e γ è il segmento di estremi $(1,0)$ e $(0,1)$. Giustificare attentamente i passaggi!

Suggerimento. $\mathrm{d}\vec{p} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$*; quindi* $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{p}$ *è una forma differenziale. L'integrale assegnato rappresenta il lavoro del campo* $\vec{F}$.

Esercizio 5.29: Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = (2xy - y^3 + 3x)\,\mathrm{d}x + (x^2 - 3xy^2 + 3y)\,\mathrm{d}y$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma (2xy - y^3)\,dx + (x^2 - 3xy^2 + 2y)\,dy$$

dove γ è il bordo del quadrato di vertici $(0,0)$ e $(1,1)$ avente lati paralleli agli assi, percorso in senso orario.

Suggerimento. Usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

Esercizio 5.30: Considerato il campo di forze dipendente dal parametro $\beta \in \mathbb{R}$:

$$F(x,y,z) = (2\beta x + \beta^2 y - 3\beta z, \beta^2 x + 1, 3\beta x),$$

determinare il valore del parametro β affinché sia minimo il lavoro del campo lungo la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma(t) = (t^2, t^3, t - t^2).$$

Quale è il valore di tale minimo?

Esercizio 5.31: Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo

$$w(x,y,z) = (2x - z, 2y, \alpha x).$$

Calcolare poi, per tale valore di α, il lavoro del campo vettoriale per lo spostamento di un punto da $(0,0,0)$ a $(0,0,1)$.

Esercizio 5.32: Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo

$$w(x,y,z) = (x^2 y + \beta z, \alpha x^3 - \beta z, \alpha y + \beta x).$$

Calcolare poi, per tali valori di α e β, il lavoro del campo vettoriale per lo spostamento di un punto da $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$.

Esercizio 5.33: Stabilire se il campo vettoriale

$$(x,y) \mapsto \left(y^2 e^{xy^2}\ ,\ 2xye^{xy^2}\right)$$

è conservativo. Calcolare poi il seguente integrale curvilineo

$$\oint_\gamma (y^2 e^{xy^2} + 1)\,dx + (2xye^{xy^2} + xy)\,dy$$

dove γ è il bordo (percorso una sola volta, in senso orario) dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le -x^2 + x\}$$

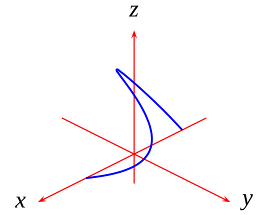
Suggerimento. Usare la proprietà additiva degli integrali.

Esercizio 5.34: Assegnato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (1 + z(1+x)e^{x-yz},\\ -xz^2 e^{x-yz}, x(1-zy)e^{x-yz}),$$

calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva parametrizzata da:

$$t \mapsto \\ (\cos(t), \sin(2t), \sin(t)), \\ t \in [0,\pi]$$



rappresentata qui a fianco.

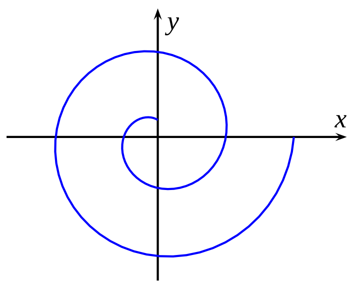
Esercizio 5.35: Dato, in $\mathbb{R}^2$, il campo di forze

$$F(x,y) = (x^2 + y^2 - x + 3\ ,\ 2xy - y - 1),$$

Determinare il lavoro (del campo) necessario per spostare un punto lungo la curva

$$\gamma : t \mapsto (t\cos t, t\sin t), \qquad \pi/2 \le t \le 4\pi$$

rappresentata qui sotto.



Esercizio 5.36: Dati i campi di forze in $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = (2xy + 2z, x^2 - z, 2x - y),$$
$$G(x,y,z) = (2xy + z, x^2, x + 3)$$

calcolare il lavoro dei campi F e G compiuto per spostare un punto lungo l'arco di curva

$$\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(t) = (t, \cos(\pi t), \sin(\pi t)).$$

Suggerimento. Controllare se il campo è conservativo. In caso affermativo, determinare una funzione potenziale oppure calcolare il lavoro utilizzando una curva più conveniente che connette il punto iniziale $\varphi(-1)$ con quello finale $\varphi(1)$.

Esercizio 5.37: Sia $F(x,y) = (2xy + 2x - 3, x^2 + 2y)$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^2$. Se F rappresenta un campo di forze, calcolare il lavoro necessario a spostare, in senso orario, un punto lungo l'arco di ellisse di equazione $x^2/4 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Esercizio 5.38: Dire se il campo vettoriale $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$ e trovarne un potenziale.

Utilizzare il potenziale appena trovato per calcolare il lavoro necessario a spostare un punto lungo il segmento γ congiungente il punto $(0, 0, 0)$ con $(2, 3, 1)$.

Esercizio 5.39: Si consideri il seguente campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{yz}{1 + x^2y^2z^2} \, , \, \frac{xz}{1 + x^2y^2z^2} \, , \, \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2} \right).$$

Determinare, se possibile, un potenziale di tale campo che valga zero nell'origine.

[Soluzione: $\arctan(xyz)$.]

Esercizio 5.40: Determinare il domino naturale del campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2}, 1 \right)$ e dire se è conservativo. Nel caso determinarne un potenziale.

Esercizio 5.41: Determinare se il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2, y, z^3)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, è conservativo. In caso affermativo, calcolare tra tutti i possibili potenziali del campo vettoriale quello che si annulla in $(0, 0, 0)$.

[Soluzione: Il campo è conservativo. Il potenziale cercato è $\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^4}{4}$.]

Esercizio 5.42: Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale dato da

$$F(x, y) = (2xye^{x^2} + 2xe^y, e^{x^2} + x^2e^y).$$

Calcolare il lavoro del campo relativo allo spostamento di un punto lungo la curva $\gamma(t) = (t^2, 1 - t)$, $0 \le t \le 1$.

Esercizio 5.43: Stabilire se il il campo vettoriale dato da:

$$(x, y) \mapsto (\, \sin(xy) + xy\cos(xy) \, , \, x^2\cos(xy) - 1)$$

è conservativo e, in questo caso, determinarne un potenziale che nell'origine valga 3.

Esercizio 5.44: Stabilire se il il campo vettoriale dato da:

$$(x, y) \mapsto (\, \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2 \, , \, x^2\cos(xy))$$

è conservativo e, in questo caso, determinarne un potenziale che nell'origine valga 4.

Esercizio 5.45: Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x, y) = (y^2, -xy)$, calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma \left\langle \vec{v}, \vec{t} \right\rangle \, \mathrm{d}s$$

dove γ è la curva parametrizzata da

$$\theta \mapsto (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta), \qquad \theta \in [\pi, 2\pi],$$

e $\vec{t}(\theta)$ è il versore tangente alla curva γ nel punto $\gamma(\theta)$, per ogni $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

Esercizio 5.46: Sia $F(x, y, z) = (3x^2y - y^2 + z, x^3 - 2xy, x)$ un campo vettoriale assegnato. Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva parametrizzata da

$$t \mapsto \left(\cos t \, , \, \sin t, \, \frac{t}{\pi} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 5.47: Calcolare

$$\int_\gamma |x| \, \mathrm{d}s$$

dove γ è data da

$$\gamma(t) = (t, t\sin t, t\cos t), \qquad -2\pi \le t \le 2\pi.$$

[Soluzione: $\frac{4\sqrt{2}}{3}\left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.]

Esercizio 5.48: Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 + x)\,\mathrm{d}y$$

dove γ è il bordo del quadrato di vertici $(0, 0)$ e $(1, 1)$ avente lati paralleli agli assi, percorso in senso orario.

Suggerimento. Usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

Esercizio 5.49: Determinare, se possibile, tutte le primitive della seguente forma differenziale

$$\omega(x, y) = (e^{xy} + xye^{xy} \, , \, x^2e^{xy}).$$

[Soluzione: Tutte le primitive sono della forma $xe^{xy} + c$, con c costante arbitraria.]

Esercizio 5.50: Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo

$$w(x, y, z) = (x^2y + \beta z, \alpha x^3 - \beta z, \alpha y + \beta x).$$

Calcolare poi, per tali valori di α e β, il lavoro del campo vettoriale per lo spostamento di un punto da $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$.

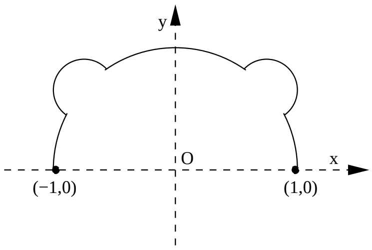
Esercizio 5.51: Determinare il valore α_0 del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ affinché la forma differenziale

$$\omega_\alpha(x, y) = (e^{x+y} + xe^{x+y} - y)\,\mathrm{d}x + (xe^{x+y} - \alpha x)\,\mathrm{d}y$$

sia esatta. Calcolare poi, per $\alpha = \alpha_0$, l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega_{\alpha_0}$$

dove γ è la curva in figura



percorsa da sinistra verso destra.

Esercizio 5.52: Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

è esatta. Servirsi di questo fatto per calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma 6xy\,\mathrm{d}x + (3x^2 + x)\,\mathrm{d}y$$

dove γ è il bordo del rettangolo di vertici $(0, 0)$ e $(1, 2)$ avente lati paralleli agli assi, percorso in senso orario.
Suggerimento. Usare la proprietà additiva degli integrali curvilinei.

Esercizio 5.53: Calcolare il valore massimo ottenuto dal seguente integrale al variare di $a \in [0, 1/\sqrt{2}]$,

$$\int_\gamma a|x|\ \mathrm{d}s$$

dove γ è data da

$$\gamma(t) = (at, at\sin(t), at\cos(t)),$$
$$-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \le t \le \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Esercizio 5.54: Consideriamo, in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, la forma $\omega = y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$. Determinare una funzione $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tale che la forma $\sigma := \alpha(x)\omega$ sia esatta in D e tale che $\alpha(1) = 1$.
Suggerimento. Ricavare una equazione differenziale dalla condizione che σ sia chiusa.

[Soluzione: $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.]

Esercizio 5.55: Determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$h(a) = \int_\gamma a(x - y)\,\mathrm{d}x - (a^2 - 1)x\,\mathrm{d}y,$$

dove γ è la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario, assume il suo massimo.

Esercizio 5.56: Stabilire se il campo vettoriale $F(x, y, z) = (zye^{xy}, zxe^{xy}, e^{xy})$ è conservativo. Calcolare poi il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega$$

dove $\omega = (zye^{xy} + z)\,\mathrm{d}x + zxe^{xy}\,\mathrm{d}y + (e^{xy} - x)\,\mathrm{d}z$ e γ è la curva parametrizzata da

$$t \mapsto (\cos(t), \sin(2t), \sin(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Esercizio 5.57: Sia $\omega = 2(x-y-xy)\,\mathrm{d}x + (2y-2x-x^2)\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$. Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ è la spezzata che congiunge (nell'ordine) i punti $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$.

[Soluzione: 1.]

Capitolo 6

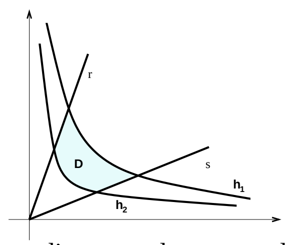
Integrali multipli e di superficie

6.1 Integrali doppi

Esercizio svolto: Sia D il dominio di $\mathbb{R}^2$ giacente nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ e racchiuso tra le iperboli h_1 ed h_2 di equazione rispettivamente $xy = \pi$ e $xy = \pi/2$ e le rette r ed s di equazione $y = ex$ e $y = x/e$ rispettivamente. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Svolgimento. Un qualunque punto di D è determinato unicamente dall'intersezione di un'iperbole e di una retta del tipo $xy = u$, $y = vx$, rispettivamente, per parametri u e v opportuni.



Ricavando x e y in funzione di u e v da queste due equazioni, si ottiene

$$x(u,v) = \sqrt{u/v} \quad y(u,v) = \sqrt{uv}.$$

Queste formule definiscono una trasformazione C^∞ e biunivoca dal rettangolo

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi,\ \frac{1}{e} \leq v \leq e\}.$$

all'insieme di integrazione D. Il determinante jacobiano di tale trasformazione è:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2v\sqrt{u/v}} & \frac{v}{2\sqrt{uv}} \\ -\frac{u}{2v^2\sqrt{u/v}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Perciò

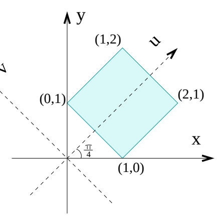
$$\begin{aligned}\iint_D \sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D'} \frac{\sin u}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2\ln e}{2}(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}) = 1\end{aligned}$$

Esercizio svolto: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_Q xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove Q è il quadrato di vertici $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,0)$.

Svolgimento. Si osservi che ogni punto del piano xy è univocamente individuato dall'intersezione di due rette della forma $x + y = u$ e $x - y = v$, ciascuna delle quali è parallela a due lati opposti del quadrato.



È quindi conveniente scegliere i due numeri u e v come nuove coordinate di un generico punto $p \in Q$. Ricavando x e y dalle equazioni delle due rette si ottiene la trasformazione di coordinate

$$x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \quad y = \frac{u}{2} - \frac{v}{2},$$

il cui determinante jacobiano è

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Si osservi che, mediante la suddetta trasformazione, Q è immagine del quadrato

$$A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 3, -1 \leq v \leq 1\}.$$

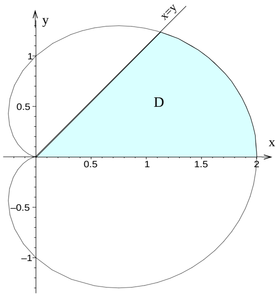
Dunque,

$$\begin{aligned}\iint_Q xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_A \frac{u^2 - v^2}{4}\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{8}\int_1^3 \left(\int_{-1}^1 (u^2 - v^2)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{8}\int_1^3 \left(2u^2 - \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}u = 2.\end{aligned}$$

Esercizio svolto: Calcolare l'area del dominio D compreso tra la curva di equazione $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x$ (detta cardioide), la retta di equazione $x = y$ e l'asse x.

Svolgimento. Consideriamo la trasformazione in coordinate polari

$$x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta, \qquad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta.$$



Nelle nuove coordinate l'equazione della curva e della retta diventano, rispettivamente $\rho = 1+\cos\theta$ e $\theta = \pi/4$.
Inoltre la retroimmagine D' dell'insieme D mediante questa trasformazione è il dominio

$$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \rho \le 1+\cos\theta\}$$

Allora, ricordando che il determinante jacobiano della trasformazione in coordinate polari è uguale a ρ, si ottiene:

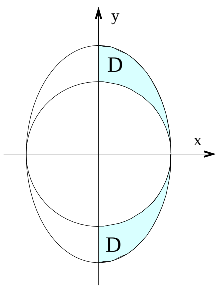
$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{D'} \rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{1+\cos\theta} \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{1}{8} + \frac{3\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio svolto: Calcolare il centro di massa di una lamina piana di densità costante (diciamo uguale a 1) descritta da

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1, x^2+y^2 \ge 4\}.$$

Svolgimento. L'ordinata y_G del centro di massa è 0 per motivi di simmetria. Calcoliamo $x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\,dx\,dy$, dove M è la massa della lamina.
Consideriamo i domini

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, x^2+y^2 \le 4.\}$$



Chiaramente:

$$M = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{D_1} 1\,dx\,dy - \iint_{D_2} 1\,dx\,dy,$$
$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_1} x\,dx\,dy - \iint_{D_2} x\,dx\,dy.$$

Per calcolare gli integrali nel dominio D_1 usiamo la seguente trasformazione in *coordinate ellittiche*:

$$x(\rho,\theta) = 2\rho\cos\theta, \quad y(\rho,\theta) = 3\rho\sin\theta.$$

Osserviamo che, come la trasformazione in coordinate polari, questa è continua in ogni rettangolo $[0,a]\times[-\pi,\pi]$, per ogni $a > 0$ (è addirittura C^1) ed è biunivoca nel suo interno.
Il determinante jacobiano di questa trasformazione è

$$\det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\rho\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3\rho\cos\theta \end{pmatrix} = 6\rho.$$

La retroimmagine D_1' di D_1 mediante questa trasformazione è il rettangolo

$$D_1' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \rho \le 1, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

Allora

$$\iint_{D_1} 1\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 6\rho\,d\rho\right) d\theta = 3\pi,$$
$$\iint_{D_1} x\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 12\rho^2\cos\theta\,d\rho\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\,d\theta = 8$$

Come si vede subito,

$$\iint_{D_2} 1\,dx\,dy = 2\pi, \qquad \iint_{D_2} x\,dx\,dy = \frac{16}{3}.$$

Allora

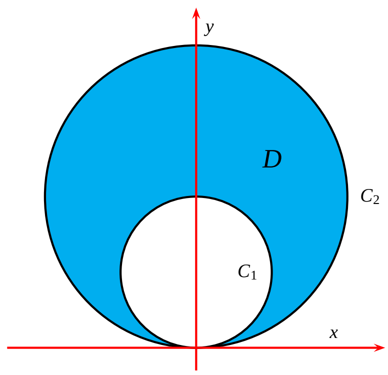
$$x_G = \frac{8-\frac{16}{3}}{3\pi - 2\pi} = \frac{8}{3\pi}.$$

Esercizio svolto: Calcolare

$$\iint_D x^2+y^2\,dx\,dy$$

dove D è la regione di piano compresa tra le seguenti circonferenze

$$C_1) \qquad x^2+y^2-2y = 0$$
$$C_2) \qquad x^2+y^2-4y = 0$$



Svolgimento. Passiamo a coordinate polari, $x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$, $y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$. L'equazione di C_1 diventa $\rho = 2\sin\theta$ mentre quella di C_2 diviene $\rho = 4\sin\theta$. La retroimmagine del dominio D mediante la trasformazione $(\rho,\theta) \mapsto (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$ è l'insieme

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le \pi,\ 2\sin\theta \le \rho \le 4\sin\theta\}$$

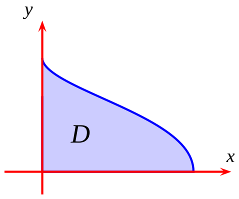
Allora si ha

$$\iint_D x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \int_0^\pi 60[\sin\theta]^4\,\mathrm{d}\theta = \frac{45}{2}\pi$$

Esercizio svolto: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D xe^{\frac{y}{5}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove D è la regione di piano compresa tra l'asse x e la curva parametrizzata da



$$\gamma(t) = (1-\cos(\pi t), \ln(2-t)^5),$$
per $t \in [0,1]$.

Svolgimento. Poniamo $B(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^{\frac{y}{5}}$. Chiaramente $\frac{\partial B}{\partial x} = xe^{\frac{y}{5}}$. Per le formule di Gauss-Green si ha

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} B(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

dove ∂D è percorsa in senso positivo. La frontiera di D consiste di delle curve parametrizzate (tenendo conto della direzione) $\sigma_1 = (0,y)$, $y \in [0, 5\ln 2]$, e $\sigma_2 = (2-2s, 0)$, $t \in [0,1]$. Si vede subito che l'integrale della forma $B\,\mathrm{d}y$ lungo le curve σ_1 e σ_2 è nullo. Invece, tenendo conto del verso di integrazione,

$$\int_\gamma B\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{5}{2}(1-\cos(\pi t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{15}{4},$$

che fornisce il valore cercato.

Esercizio 6.1: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\mathcal{I} = \iint_P \frac{x^2-y^2}{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove P è il parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(-1,3)$, $(4,0)$ e $(3,3)$, usando la trasformazione di coordinate

$$x(u,v) = \frac{u-v}{3}, \quad y(u,v) = v.$$

[Soluzione: $\mathcal{I} = \frac{4}{3}$.]

Esercizio 6.2: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\mathcal{I} = \iint_D x^3 + 3xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le x,\ \frac{x^2}{3} + y^2 \le 1\}$, Utilizzando la trasformazione di coordinate

$$x(\rho,\theta) = \sqrt{3}\rho\cos\theta, \quad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta.$$

[Soluzione: $\mathcal{I} = \frac{9\sqrt{3}}{5}$.]

Esercizio 6.3: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

Esercizio 6.4: Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}|x|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 16, y \ge 0\}$.

Esercizio 6.5: Calcolare l'area del dominio piano

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2,\ x \ge y^2\right\}.$$

[Soluzione: L'area vale $\frac{1}{3}$.]

Esercizio 6.6: Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = 3e^{2y} + 5x + 2$$

esteso al triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,3)$, $(3,0)$.

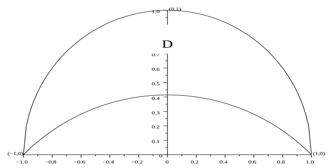
Esercizio 6.7: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1, x^2 + (y+1)^2 \ge 2\right\}.$$

Suggerimento. Il dominio D è la regione di piano rappresentata nella figura a fianco



Esercizio 6.8: Calcolare la massa totale della lamina piana

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 + x^2\},$$

dotata di densità $\rho(x, y) = 1 + |xy|$.
Suggerimento. Usare la simmetria per semplificare i calcoli.

Esercizio 6.9: Calcolare il centro di massa del triangolo di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(1, 0)$, con densità superficiale data da $\rho(x, y) = |y| + 1$.

Esercizio 6.10: Calcolare il centro di massa di una lamina piana avente la forma di un semidisco di raggio 3, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, la cui densità varia secondo la legge

$$\rho(x, y) = \sqrt{9 - y^2 - x^2}.$$

Esercizio 6.11: Calcolare la posizione del centro di massa della lamina piana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 + (x - 1)^2\},$$

dotata di densità costante.
Suggerimento. Usare la simmetria per semplificare i calcoli.

Esercizio 6.12: Calcolare il centro di massa di una lamina piana avente la forma di un semidisco di raggio 4, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, la cui densità varia secondo la legge $\rho(x, y) = 2 + y^2 + x^2$.

Esercizio 6.13: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D |x| + |y| \, dxdy,$$

dove $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2|x| + |y| \leq 1\right\}$.

Esercizio 6.14: Calcolare l'integrale doppio:

$$\iint_D x \, dxdy,$$

dove D è il quarto di corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2 contenuta nel primo quadrante.

Esercizio 6.15: Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D (\cos x)^2 \, dx \, dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$.

Esercizio 6.16: Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D (\sin x)^2 \, dx \, dy$$

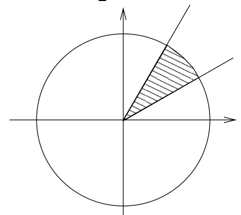
dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \cos x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$.

Esercizio 6.17: Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

dove D è la parte convessa del semipiano $y > 0$ compresa tra il cerchio di raggio $\frac{1}{2}$ e le rette $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$.

Suggerimento. Usare le coordinate polari. Il dominio D è rappresentato nella figura a fianco.



Come cambia il risultato se D è la parte convessa del semipiano $y > 0$ compresa tra il cerchio di raggio 2 e le rette $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$?

Esercizio 6.18: Calcolare

$$\iint_D \big|y - |x|\big| + y^2 \, dx \, dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$

Esercizio 6.19: Calcolare, il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x^2 - y^2 \, dxdy$$

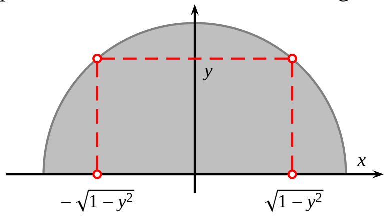
dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 < x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.
Suggerimento. Usare un cambiamento di coordinate.

Esercizio 6.20: Calcolare gli integrali doppi:

$$\iint_D x \, dxdy, \qquad \iint_D y \, dxdy$$

dove D è il quarto di corona circolare di centro l'origine e raggi 2 e 4 contenuta nel primo quadrante. Dedurne la posizione del baricentro di questa figura.

Esercizio 6.21: Calcolare il centro di massa (x_G, y_G) di una lamina piana D avente la forma di un semidisco di raggio 1, centrato nell'origine e contenuto nel semipiano $y \geq 0$, la cui densità varia secondo la legge $\rho(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$.
*Suggerimento. La difficoltà dei calcoli varia **molto** a seconda di come si svolge l'integrale. Il modo migliore, in questo caso, è "affettare" D parallelamente all'asse x come in figura:*



[Soluzione: $(x_G, y_G) = (0, \frac{3}{8})$.]

Esercizio 6.22: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D xy \, dx \, dy,$$

con

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq (x-1)^2\right\}.$$

Esercizio 6.23: Disegnare il solido

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9\}$$

e calcolarne il volume V. Calcolare poi il baricentro di T.
Suggerimento. Ricordarsi che, se $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è il baricentro, allora

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

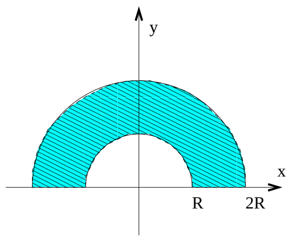
Esercizio 6.24: Calcolare il seguente limite

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \iint_{D_R} \frac{y - x}{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove

$$D_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R \leq x^2 + y^2 \leq 2R, y \geq 0\right\}.$$

Suggerimento. Usare una trasformazione in coordinate polari; D_R è rappresentato in figura.



Esercizio 6.25: Calcolare il centro di massa del quadrilatero convesso di vertici $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, con densità superficiale data da $\rho(x, y) = |y| + 1$.

Esercizio 6.26: Calcolare

$$\iint_D (x^2 + y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

dove D è la porzione dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1 \, , \, y \geq 0\}$$

compresa tra le rette di equazione $x = y$ e $x = -y$.

Esercizio 6.27: Calcolare

$$\iint_D (x^3 - y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

dove D è la porzione dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq |x|\}$$

Suggerimento. Sfruttare le proprietà di simmetria di D e della funzione integranda.

Esercizio 6.28: Olivia ha preparato una torta circolare del diametro 1 m distribuendovi in superficie dell'uvetta con densità data (in g/m^2) da $\rho(x, y) = xy - x + 2$ (il centro della torta è l'origine delle coordinate). Offre metà della torta a Poldo che, particolarmente ghiotto di uvetta deve decidere lungo quale diametro tagliare la torta in modo da ottenerne la massima quantità

Esercizio 6.29: Calcolare l'immagine della funzione

$$h(z) = \iint_T \frac{y}{z^2 + 1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(0, 2z)$ e $(1, 0)$, per $z \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.30: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D (x^2 + \sin(xy^2)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove D è il disco di centro l'origine e raggio 2.
Suggerimento. Sfruttare le proprietà di simmetria di D e della funzione integranda.

Esercizio 6.31: Determinare la posizione del centro di massa di una lamina piana, con densità $\rho(x, y) = |x| + |y|$, descritta da

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \big|x - |y|\big| \leq 1, |y| \leq 2\}.$$

Esercizio 6.32: Calcolare

$$\iint_X (x^2 - \sin(y^3)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \big|x - |y|\big| \leq 1, |x| \leq 2\right\}.$$

Esercizio 6.33: Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \left(|x| + \sin(y^5)\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove

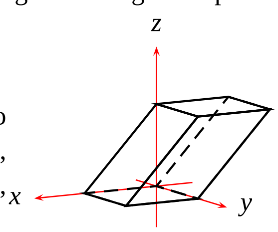
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 \geq 1, |x| + |y| \leq 1\}$$

6.2 Integrali tripli

Esercizio svolto: Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_P e^{x-z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

dove P è il parallelepipedo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1)$.



Svolgimento. Il piano per i punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 1)$

ha equazione $z + x = 0$, mentre quello (ad esso parallelo) per i punti $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ ha equazione $z + x = 1$. Consideriamo il cambiamento di coordinate

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w) = (u,v,u-w)$$

Chiaramente $P = \Phi(R)$ dove

$$R = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u \in [0,1], v \in [0,1], w \in [0,1]\}.$$

Si ha inoltre

$$\left|\det \Phi'(u,v,w)\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

Per la formula di cambiamento di coordinate, otteniamo

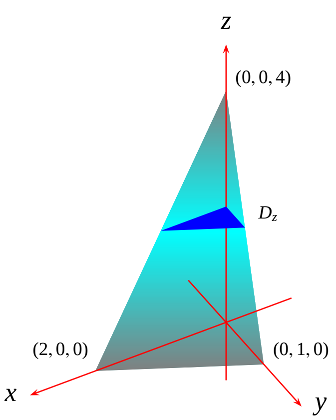
$$\iiint_P e^{x-z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_R e^w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v \int_0^1 e^w\,\mathrm{d}w = e$$

Esercizio svolto: Adelmo e Zelda hanno ereditato dal loro eccentrico zio Gervasio una piramide a base triangolare fatta d'oro mescolato ad un altro materiale inerte e di nessun valore. La piramide P, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano, ha i vertici in $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,4)$. Inoltre la densità dell'oro nella piramide è descritta dalla funzione $\rho(x,y,z) = 4 - z$. Nelle sue ultime volontà, Gervasio ha disposto di spartire P tra i due nipoti tagliandola con un piano parallelo agli assi x e y in modo tale che Adelmo ottenesse la stessa quantità d'oro di Zelda. Determinare il piano secante.

Svolgimento. Poniamo $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in P\}$ e denotiamo con $\mathrm{m}(D_z)$ la sua misura. Ovviamente, per $z \in [0,4]$, si ha che

$$D_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 - \frac{z}{2},\quad 0 \le y \le 1 - \frac{z}{4}\right\}$$

dunque $\mathrm{m}(D_z) = \frac{1}{16}(4-z)^2$.



Allora, la quantità d'oro in P compresa tra il piano xy e quello di equazione $z = \zeta$, $\zeta \in [0,4]$, è data da (integrando per fette)

$$\iiint_{\{(x,y,z)\in P: 0\le z\le \zeta\}} (4-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^\zeta \left(\iint_{D_z} (4-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_0^\zeta \mathrm{m}(D_z)(4-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{16}\int_0^\zeta (4-z)^3\,\mathrm{d}z$$

Similmente la quantità d'oro in P compresa tra il piano di equazione $z = \zeta$ ed il vertice della piramide è dato da

$$\iiint_{\{(x,y,z)\in P: \zeta\le z\le 4\}} (4-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{16}\int_\zeta^4 (4-z)^3\,\mathrm{d}z$$

Allora, il piano cercato ha equazione $z = \zeta$ dove $\zeta \in [0,4]$ è tale che

$$\int_0^\zeta (4-z)^3\,\mathrm{d}z = \int_\zeta^4 (4-z)^3\,\mathrm{d}z$$

Si ottiene $2(4-\zeta)^4 = 4^4$. Da cui segue che deve essere $\zeta = 4\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}}$.

Esercizio svolto: Calcolare l'integrale triplo

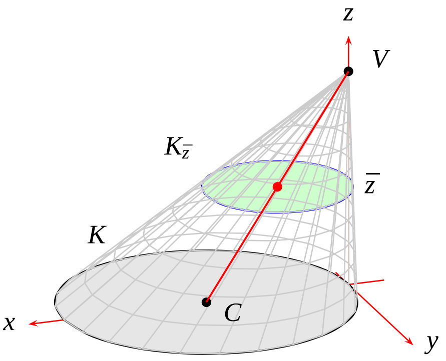
$$\iiint_K z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove K è il cono di vertice $V = (0,0,3)$ e base il disco di centro $C = (2,0,0)$ e raggio 2.

Svolgimento. Consideriamo il segmento che unisce il vertice V del cono con il centro C della base. Questo segmento, come si vede subito, giace sul piano $y = 0$ quindi appartiene alla retta

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 3 - \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Allora, per ogni $\bar{z}$ fissato, l'intersezione di K con il piano $z = \bar{z}$ è il disco $K_{\bar{z}}$ di centro $(\frac{2}{3}(3-\bar{z}), 0, \bar{z})$ e raggio $\frac{2}{3}(3-\bar{z})$ (che, chiaramente, giace nel piano $z = \bar{z}$).



Quindi, per Fubini (formula delle fette), si ha

$$\iiint_K z^2 \,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \iint_{K_z^0} z^2 \,dx\,dz$$
$$= \int_0^3 z^2 |K_z^0| \,dz = \int_0^3 \frac{4}{9}(z-3)^2 z^2 \pi \,dz,$$

dove K_z^0 è il disco nel piano $z = 0$ di centro $(\frac{2}{3}(3-z), 0)$ e raggio $\frac{2}{3}(3-z)$. Dunque,

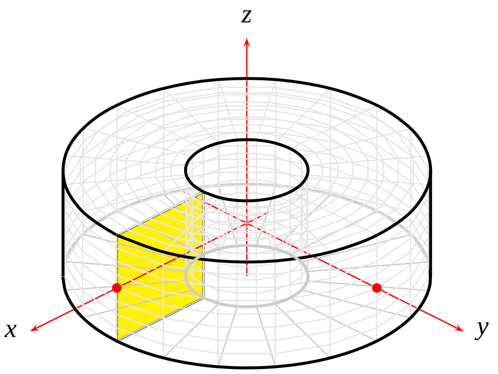
$$\iiint_K z^2 \,dx\,dy\,dz = \frac{18\pi}{5}.$$

Esercizio svolto: Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_R f(x, y, z) \,dx\,dy\,dz$$

dove R è l'anello generato dalla rotazione, attorno all'asse z del quadrato (pieno) di vertici $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(3, 0, -1)$, $(3, 0, 1)$ ed $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x, y, z) = \begin{cases} |z| & \text{se } x^2 + y^2 \le z^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Svolgimento. (**I metodo**.) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$. Per Fubini (metodo degli spaghetti), si ha

$$\iiint_R f(x, y, z) \,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{-1}^{\sqrt{x^2+y^2}} |z| \,dz$$
$$= \iint_D \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \,dx\,dy.$$

Per valutare l'ultimo integrale passiamo a coordinate polari nel piano xy. Otteniamo

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 \frac{\rho^2 + 1}{2} \rho \,d\rho \right) d\theta = 24\pi.$$

(**II metodo**.) Consideriamo la trasformazione in coordinate cilindriche

$$(x, y, z) = \varphi(\rho, \theta, \zeta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \zeta)$$

Il determinante jacobiano di φ vale ρ. Dunque

$$\iiint_R f(x, y, z) \,dx\,dy\,dz = \iiint_T |\zeta| \rho \,d\rho\,d\theta\,d\zeta$$

dove

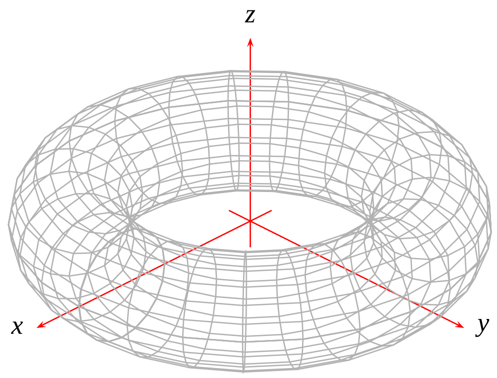
$$T = \{(\rho, \theta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi, -1 \le \zeta \le \rho\}$$

Da cui segue il risultato precedente.

Esercizio svolto: Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T z^2 \,dx\,dy\,dz$$

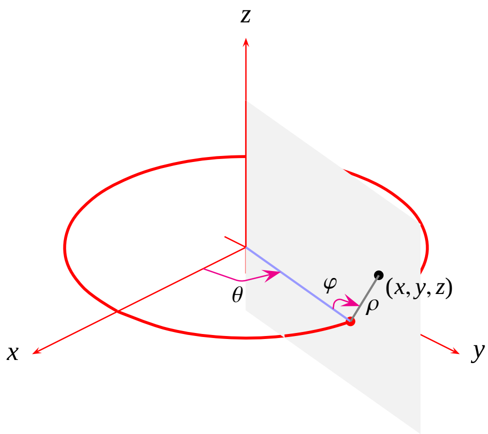
dove T è il solido generato dalla rotazione attorno all'asse z del disco di equazione $x^2 + z^2 - 6x - 1 \le 0$ giacente nel piano $y = 0$.



Svolgimento. Consideriamo il cambiamento di variabili (che potremmo chiamare "toroidale")

$$(x, y, z) = \Phi(\rho, \theta, \varphi)$$
$$= ((3 + \rho\cos\varphi)\cos\theta, (3 + \rho\cos\varphi)\sin\theta, \rho\sin\varphi).$$

Qui θ e φ sono angoli e ρ è una distanza misurati come nel seguente diagramma:



Il determinante jacobiano di questa trasformazione vale, come si vede subito, $\rho(3+\rho\cos\varphi)$. Dunque,

$$\iiint_T z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_P \rho^3(\sin\varphi)^2(3+\rho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

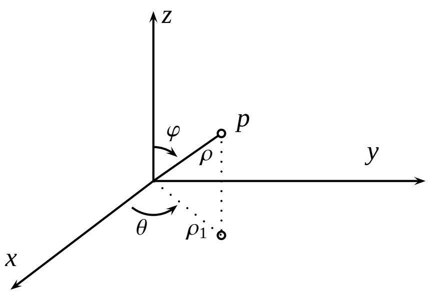
dove $P = \{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : \rho\in[0,1], \theta\in[0,2\pi], \varphi\in[0,2\pi]\}$. Un calcolo diretto mostra che il risultato voluto è $\frac{3}{2}\pi^2$.

Esercizio svolto: Calcolare la massa di una sfera di raggio 1 metro la cui densità $\rho(x,y,z)$, misurata in Kg/m^3, è data da $\rho(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$.

Svolgimento. Dobbiamo calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_S \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Per farlo, utilizziamo le coordinate sferiche. In questo sistema, ogni punto di $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ è individuato mediante la sua distanza dall'origine e una coppia di angoli come nel seguente disegno



Si ha $\rho_1 = \rho\sin\varphi$ e quindi

$$\begin{cases} x = \rho_1\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho_1\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

Il determinante jacobiano della trasformazione in coordinate sferiche è dato da

$$\det\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

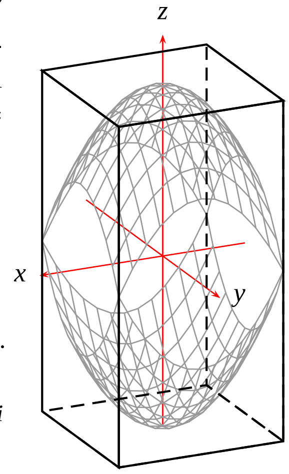
L'integrale cercato diventa

$$\iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} \frac{\rho^2\sin\varphi}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi-\pi^2,$$

che da il valore della massa in Kg.

Esercizio 6.34: Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D \frac{1}{2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



dove D è la regione di $\mathbb{R}^3$ compresa tra i grafici delle funzioni $f_1(x,y) = 2-x^2-y^2$ e $f_2(x,y) = x^2+y^2-2$ con $|x|\le 1$ e $|y|\le 1$. Cioè

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1, \\ 2-x^2-y^2\le z\le x^2+y^2-2 \end{array}\right\}.$$

Suggerimento. Usare le formule di integrazione per spaghetti.

[Soluzione: 2.]

Esercizio 6.35: Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove A è il solido generato dalla rotazione attorno all'asse z del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,0,1)$.

Suggerimento. Usare le coordinate cilindriche

[Soluzione: $\frac{\pi}{3}$.]

Esercizio 6.36: Il tetraedro T di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$ è costituito da un materiale avente densità $\rho(x,y,z) = |x-y|+1$. Determinare la massa di T.

Esercizio 6.37: Disegnare il solido

$$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\le 9\}$$

e calcolarne il volume V. Calcolare poi il baricentro di T.

Suggerimento. Ricordarsi che, se $G = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ è il baricentro, allora

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_T z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Esercizio 6.38: Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$\iiint_V z-1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \iiint_V z+1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}.$$

Suggerimento. Usare le coordinate cilindriche.

Esercizio 6.39: Calcolare il volume del dominio D dato da

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\, y \geq 0, \\ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - 4y^2\}.$$

Esercizio 6.40: Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_P |z| \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, |z| \leq 2\}$.

Suggerimento. Usare le coordinate cilindriche.

[Soluzione: $\frac{128}{15}\pi$.]

Esercizio 6.41: Calcolare

$$\iiint_D \frac{z}{2x^2 + 2y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}.$$

Suggerimento. Usare le coordinate sferiche.

[Soluzione: $\frac{3}{8}\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.]

Esercizio 6.42: Calcolare

$$\lim_{r \to 0^+} \iiint_{D_r} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove

$$D_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}.$$

Suggerimento. Usare le coordinate sferiche.

[Soluzione: $(2 - \sqrt{2})\pi$.]

Esercizio 6.43: Calcolare il seguente integrale triplo

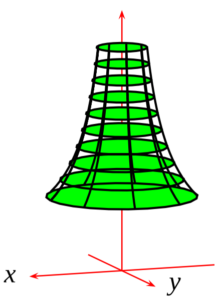
$$\iiint_D z\, dx\, dy\, dz$$

dove D è il sottoinsieme del cilindro (pieno) $x^2 + y^2 \leq x$ compreso tra il piano $z = 0$ ed il paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Suggerimento. Nelle coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ e $z = \zeta$ il cilindro pieno dato si rappresenta come $\rho \leq \cos\theta$ con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed il paraboloide si scrive come $\zeta = \rho^2$.

[Soluzione: $\frac{8}{75}$.]

Esercizio 6.44: Dato $h > 1$, calcolare il volume V_h del solido



$$T_h = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq h, \\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{z^2}\right\}.$$

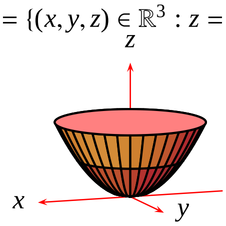
Calcolare poi il limite, per h che tende a $+\infty$, di V_h.

Suggerimento. Usare l'esercizio 4.25.

[Soluzione: $V_h = \pi(1 + \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h})$, $\lim_{h \to +\infty} V_h = \pi$.]

6.3 Integrali di superficie

Esercizio svolto: Determinare il centro di massa (x_G, y_G, z_G) della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.



Svolgimento. Per la simmetria della superficie $x_G = y_G = 0$. Scriviamo Σ come superficie parametrizzata ponendo

$$\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2) \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Si ha

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \neq 0$$

Per determinare z_G poniamo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e calcoliamo

$$\iint_\Sigma dS = \iint_D \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\| dx\, dy \\ = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.$$

Calcoliamo inoltre

$$\iint_\Sigma z\, dS = \iint_D (x^2 + y^2) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\| dx\, dy \\ = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1 + 4r^2}\, dr = \frac{\pi(25\sqrt{5} + 1)}{60}.$$

Si ha, infine,

$$z_G = \frac{\iint_\Sigma z\, dS}{\iint_\Sigma dS} = \frac{25\sqrt{5} + 1}{10(5\sqrt{5} - 1)}.$$

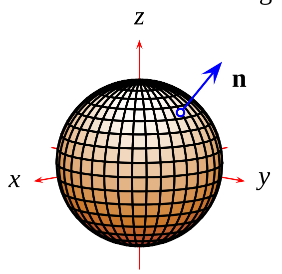
Esercizio svolto: Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$F(x, y, z) = (2x - y, y^2, z - x).$$

Calcolare il flusso di F uscente dalla sfera unitaria S centrata nell'origine.

Svolgimento. Il flusso richiesto è dato dall'integrale superficiale

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS$$



dove $\mathbf{n}$ rappresenta il versore normale esterno a S. Per il teorema della divergenza, se D è la palla unitaria,

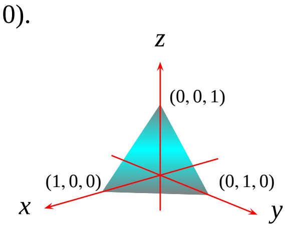
$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = \iiint_D 2y + 3\, dx\, dy\, dz = \iiint_D 3\, dx\, dy\, dz = 3 \iiint_D dx\, dy\, dz = 4\pi.$$

Quindi, il flusso richiesto vale 4π.

Esercizio svolto: Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$F(x, y, z) = (x, y - x, z + x).$$

Calcolare il flusso Φ di F che attraversa il triangolo T di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ orientato dal versore normale che punta lontano dall'origine degli assi. Calcolare poi il flusso Ψ di F uscente, cumulativamente, dalle facce parallele ai piani coordinati del tetraedro V di vertici $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, 0)$.



Svolgimento. Il piano passante per i tre punti dati ha equazione

$$x + y + z = 1.$$

Pertanto una parametrizzazione regolare per T è data da

$$\varphi(u, v) = (u, v, 1 - u - v), \quad (u, v) \in \mathcal{T}$$

dove $\mathcal{T} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 - u\}$. Il versore normale $\mathbf{n}$ è dato da

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Dunque,

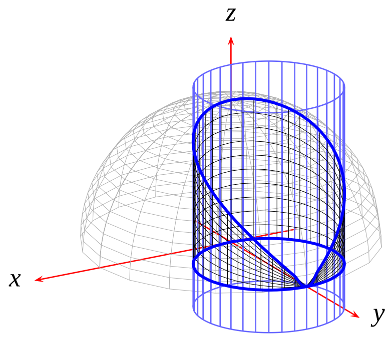
$$\Phi = \int_T F \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{\mathcal{T}} du\, dv = \frac{1}{2}.$$

Per il teorema della divergenza il flusso uscente da V è dato da

$$\iiint_V \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V 3\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}.$$

Ne segue $\Psi = 0$.

Esercizio svolto: Calcolare l'area della parte di cilindro di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ contenuta nella semisfera rappresentata da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z \ge 0$.



Svolgimento. (**I metodo.**) Per prima cosa scriviamo una rappresentazione parametrica della superficie S che ci interessa. Pe farlo, consideriamo coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$: $x(\rho, \theta, \zeta) = \rho\cos\theta$, $y(\rho, \theta, \zeta) = \rho\sin\theta$ e $z(\rho, \theta, \zeta) = \zeta$. L'equazione del cilindro diventa $\rho = \sin\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, mentre quella della semisfera è $\zeta = \sqrt{1 - \rho^2}$, $\rho \in [0, 1]$. Ne segue che la superficie in esame può essere rappresentata parametricamente da

$$\Phi(\theta, \zeta) = \left(\sin\theta\cos\theta, (\sin\theta)^2, \zeta\right), \quad (\theta, \zeta) \in D$$

con $D = \left\{(\theta, \zeta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \pi], 0 \le \zeta \le \sqrt{1 - (\sin\theta)^2}\right\}$. Osserviamo che

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \\ 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

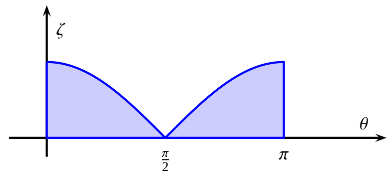
$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right\| = \sqrt{(2\sin\theta\cos\theta)^2 + ((\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2)^2} = \sqrt{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$$

Allora,

$$\iint_S dS = \iint_D \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right\| d\theta\, d\zeta = \iint_D d\theta\, d\zeta = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sqrt{1-(\sin\theta)^2}} d\zeta = 2$$

Che è l'area cercata.

(**II metodo – cenno.**) La superficie del cilindro può essere sviluppata, in modo 'isometrico' (relativamente al cilindro), nel piano cartesiano di coordinate θ e ζ. Questa corrispondenza si realizza mandando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$, $z = 0$ nel segmento del piano $\theta\zeta$ di estremi $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ (la lunghezza di quella circonferenza è π), e identificando le generatrici del cilindro con le rette del piano $\theta\zeta$ parallele all'asse ζ. In questo piano la superficie S è caratterizzata da $0 \le \zeta \le \sqrt{1 - (\sin\theta)^2} = |\cos\theta|$, $\theta \in [0, \pi]$.

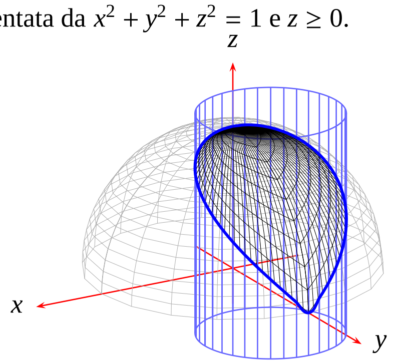


Per cui

$$|S| = \int_0^\pi |\cos\theta| \, d\theta = 2,$$

come già visto.

Esercizio svolto: Calcolare l'area dell'intersezione del cilindro pieno di equazione $x^2 + y^2 - y \le 0$ con la semisfera rappresentata da $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z \ge 0$.



Svolgimento. (**I metodo.**) Per simmetria, è sufficiente calcolare l'area del pezzo S di superficie contenuto nell'ottante $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$. L'area cercata sarà poi il doppio di quella trovata. Scriviamo una rappresentazione parametrica della superficie S che ci interessa. La superficie della sfera si può parametrizzare (ricordando le coordinate sferiche) con

$$(x, y, z) = \Phi(\theta, \varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi), \qquad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

A noi interessa la parte della sfera che giace nell'intersezione di O e del cilindro. cioè che soddisfa

$$\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 - y = (\sin\varphi)^2 - \sin\theta\sin\varphi, \\ 0 < x = \cos\theta\sin\varphi, \\ 0 < y = \sin\theta\sin\varphi, \\ 0 < z = \cos\varphi. \end{cases}$$

Dalle ultime di queste disuguaglianze segue $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Cosicché dalla prima si ottiene $\sin\varphi < \sin\theta$, che implica $\varphi < \theta$ perché la funzione seno è monotona nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. In definitiva la superficie S è descritta dalla parametrizzazione Φ per $(\theta, \varphi) \in D$ con

$$D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), 0 < \varphi < \theta\}.$$

Si ha, inoltre,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\begin{pmatrix} cos\theta(\sin\varphi)^2 \\ \sin\theta(\sin\varphi)^2 \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$|S| = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right\| d\theta \, d\varphi = \iint_D \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi}{2} - 1.$$

L'area cercata, allora, vale $2|S| = \pi - 2$.

(**II metodo – cenno.**) Usiamo le coordinate cartesiane. La superficie che ci interessa è data da

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le y, \ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Quindi $\mathcal{S}$ è il grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ definita sull'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le y\}$. Per calcolarne l'area consideriamo la parametrizzazione

$$\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Con semplici calcoli si ottiene

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Da cui segue che

$$|S| = \iint_S dS = \iint_A \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \pi - 2.$$

Esercizio 6.45: Sia $D_R \subset \mathbb{R}^2$ il disco di centro l'origine e raggio R. Poniamo

$$S_R = \{(x, y, z) : z = xy, (x, y) \in D_R\}.$$

Calcolare

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Area}(S_R)}{[\mathrm{Area}(D_R)]^{3/2}}.$$

Suggerimento. L'area $\mathrm{Area}(S_R)$ *è data dall'integrale superficiale* $\iint_{S_R} 1 \, dS$*. La superficie* S_R *non è altro che il grafico della funzione* $f(x, y) = xy$ *ristretta a* D_R*.*

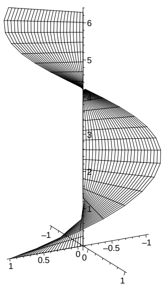
Esercizio 6.46: Calcolare, per ogni $\alpha \in [0,1]$, l'area della superficie parametrizzata Σ_α data da

$$(u,v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, \alpha v), \quad (u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi].$$

Suggerimento. L'area è data dall'integrale superficiale

$$\iint_{\Sigma_\alpha} 1\,\mathrm{d}S.$$

La superficie Σ_1 è rappresentata qui a fianco.



Esercizio 6.47: Considerare la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0\}$$

orientata in modo tale che il versore normale abbia la terza componente positiva. Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (z,0,x)$ attraverso Σ.
Suggerimento. Posto $\Phi(x,y,z) = (xy, x^2, yz)$, si ha rot $\Phi = F$. *Allora l'esercizio si può risolvere usando il teorema di Stokes.*

Esercizio 6.48: Calcolare l'area della superficie parametrizzata da

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

con $u \in [-1,1]$ e $v \in [0,\pi]$.

Esercizio 6.49: Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}S$$

dove S è il grafico della funzione $(x,y) \mapsto xy$ ristretta al rettangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ e $(0,2)$.

Esercizio 6.50: Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il campo vettoriale v dato da $v(x,y,z) = \vec{i} + (1-z)\vec{j}$. Si consideri inoltre, per ogni $\alpha \in [0,\pi/2]$ la superficie Σ parametrizzata da

$$\phi_\alpha(u,v) = (u, v\cos\alpha, v\sin\alpha) \qquad (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$$

Si determini, per ogni $\alpha \in [0,\pi/2]$ il valore assoluto del flusso di v attraverso Σ e si scelga $\alpha \in [0,\pi/2]$ affinché tale valore sia minimo.

Esercizio 6.51: Calcolare la superficie del solido dato dall'intersezione del cilindro (pieno)

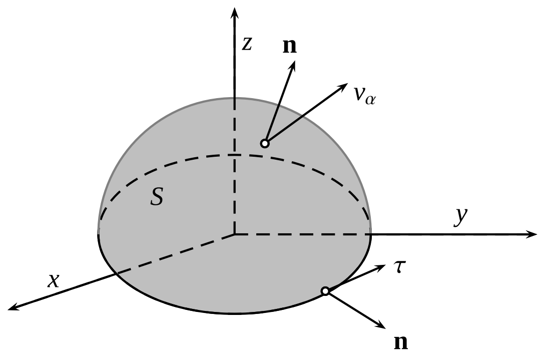
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1/2\}$$

Con la sfera (piena) di centro l'origine e raggio 1.

Esercizio 6.52: Sia S la superficie della semisfera di centro l'origine, raggio 1, contenuta nel semispazio $z \geq 0$ ed orientata dalla scelta del versore normale $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ nel punto $(0,0,1) \in S$. Dato il campo vettoriale

$$v_\alpha(x,y,z) = (1-\alpha, 1-\alpha y, \alpha(z-1))$$

dipendente dal parametro $\alpha \in [0,1]$, determinare per quale valore di $\alpha \in [0,1]$ il flusso di v_α attraverso S è minimo.
Suggerimento. Usare il Teorema di Stokes, infatti si ha $v_\alpha(x,y,z) =$ rot $(-\alpha yz, -\alpha(x+z), y+z)$.



Esercizio 6.53: Si consideri in campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x,y,z) = (x, 2y, 1).$$

Stabilire il valore assoluto del flusso di F attraverso la superficie del rettangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,1)$.

Esercizio 6.54: Si consideri in campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ dato da

$$F(x,y,z) = (x, 2y+z, -3z).$$

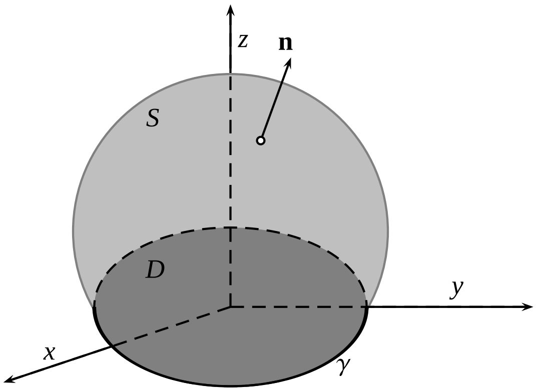
Calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-2z = 4, z \geq 0\}$$

orientata in modo tale che la normale ad S nel punto di intersezione con l'asse z abbia lo stesso verso dell'asse z.
Suggerimento. Il campo F ha divergenza nulla ed è definito in tutto $\mathbb{R}^3$ (che è semplicemente connesso) quindi è il rotore di un qualche campo G. Per il teorema di Stokes, il flusso di F, dato dalla circuitazione di G lungo l'intersezione

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4, z = 0\}$$

di S con il piano $z = 0$, è uguale al flusso di F attraverso il disco D, delimitato da γ sul piano $z = 0$, ed orientato dal versore dell'asse z. Notare che non c'è bisogno di conoscere G.



Si osservi anche che la stessa conclusione si può ottenere mediante il teorema della divergenza.

Esercizio 6.55: Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$F(x, y, z) = (x - 2y, 3y, 2z - 3x^2 - 3y^2),$$

e sia S la superficie della semisfera di centro l'origine, raggio 1, contenuta nel semispazio $z \geq 0$ ed orientata dalla scelta del versore normale $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ nel punto $(0, 0, 1) \in S$. Calcolare il flusso Φ di F attraverso S.

Suggerimento. Consideriamo la superficie S' ottenuta aggiungendo ad S il disco $\Delta = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia D la parte di spazio racchiusa da S'. Per il teorema della divergenza, il uscente da D è dato da

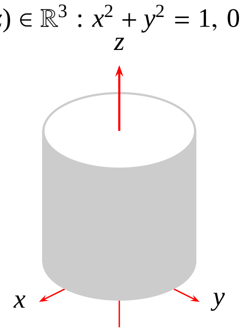
$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 4\pi.$$

Ma il flusso di F (uscente) attraverso S' è dato da Φ più il flusso di F attraverso Δ (con l'orientazione opportuna). Quindi, se $\vec{k}$ denota il versore parallelo all'asse z, si ha

$$\Phi = 4\pi - \iint_\Delta -F \cdot \vec{k} \, dS.$$

[Soluzione: 2π.]

Esercizio 6.56: Calcolare il flusso del campo dato da $F(x, y, z) = (x, y - x, z + x)$ attraverso la superficie laterale del cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq 2\}$.



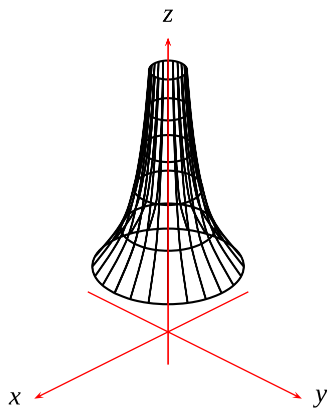
[Soluzione: 4π.]

Esercizio 6.57: Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \operatorname{rot}(yz, x, y)$$

attraverso la superficie S data da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2) = 1, \ 1 \leq z \leq 4\}.$$



Esercizio 6.58: Sia S la superficie della semisfera di centro l'origine, raggio 1, contenuta nel semispazio $z \geq 0$ ed orientata dalla scelta del versore normale $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ nel punto $(0, 0, 1) \in S$. Dato il campo vettoriale

$$w(x, y, z) = \operatorname{rot}(x + y, y - x, 1),$$

Calcolare il flusso di w attraverso S.

Esercizio 6.59: Dato $h > 1$, calcolare l'area A_h della superficie laterale del solido T_h definito nell'esercizio 6.44 e trovarne il limite per h che tende a $+\infty$.

Suggerimento. Parametrizzando la superficie usando le coordinate cilindriche (esercizio 4.25) si ottiene

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \frac{1}{\rho})$$

con $\rho \in [\frac{1}{h}, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Inoltre

$$\|\varphi_\rho(\rho, \theta) \times \varphi_\theta(\rho, \theta)\| = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \rho^2}.$$

Quindi

$$A_h = 2\pi \int_{\frac{1}{h}}^{1} \frac{\sqrt{1 + \rho^4}}{\rho} \, d\rho.$$

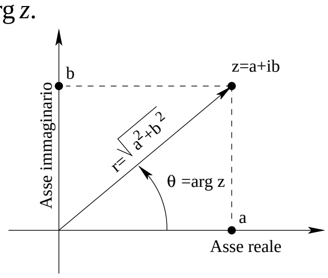
[Soluzione: $A_h = \pi\sqrt{2} - \pi\sqrt{1 + (1/h)^4} + \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{1+(1/h)^4})}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{1+(1/h)^4}-1)}\right)$, $\lim_{h\to+\infty} A_h = +\infty$). Si noti che il volume di questo solido tende ad un valore finito per $h \to +\infty$ (esercizio 6.44).]

Capitolo 7

Vari

7.1 Algebra dei numeri complessi

Esercizio svolto: Siano $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 2 - 2i$ numeri complessi. Calcolare, in forma polare, $z_1 z_2$, z_1/z_2 e $z_1^2 - z_2^2$.
Svolgimento. In generale, un numero complesso $z = a + ib$ si può sempre scrivere nella forma $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, con $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$.



Dalle ben note formule di addizione in trigonometria segue che, dati $\zeta_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $\zeta_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, si hanno le *formule di De Moivre*

$$\begin{aligned}\zeta_1\zeta_2 &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)),\\ \frac{\zeta_1}{\zeta_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)),\\ \zeta^n &= \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).\end{aligned}$$

Nel nostro caso, $|z_1| = 2\sqrt{3}$, $|z_2| = 2\sqrt{2}$, $\arg(z_1) = \arctan(\sqrt{3}/3) = \frac{\pi}{6}$ e $\arg(z_2) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Allora, dalle formule di De Moivre,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),\\ z_1/z_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_1^2 - z_2^2 &= 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= 6(\sqrt{3} + i) - 8i = 6\sqrt{3} - 2i.\end{aligned}$$

Esercizio svolto: Fissato $n \in \mathbb{N}$, risolvere l'equazione

$$z^n = 1.$$

Svolgimento. Per le formula di De Moivre, $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. Da cui $|z^n| = |z|^n$. Se $z_0 = r_0 e^{\theta_0}$ è soluzione allora $|z_0|^n = 1$ e quindi $|z_0| = 1$; inoltre deve essere

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1.$$

Questo è vero se e solo se $\sin(n\theta) = 0$, cioè $\theta = \frac{k}{n}\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Quindi le soluzioni sono esattamente i numeri complessi della forma $e^{i\pi(k/n)}$, $k \in \mathbb{Z}$. *Osservazione: Di questi numeri ce ne sono esattamente n distinti cioè quelli corrispondenti a* $k = 0, \ldots, n-1$.

Esercizio 7.1: Calcolare i seguenti prodotti:

$$(-5+3i)(7-2i), \quad i(2i), \quad -i(2-i), \quad (2-i)\overline{(1+i)}.$$

[Soluzione: Rispettivamente, $-5+3i$, -2, $-1-2i$, $1-3i$.]

Esercizio 7.2: Calcolare le seguenti espressioni in forma cartesiana
per $z = 4 - 3i$ calcolare $-1/\bar{z}$
per $z = 4 + 3i$ calcolare $-1/\bar{z}$
per $z = -4 + 3i$ calcolare $-1/\bar{z}$
per $z = -4 - 3i$ calcolare $-1/\bar{z}$

Esercizio 7.3: Sia $z = 1 - 2i$, scrivere (in forma cartesiana) $(\bar{z})^{-2}$.

[Soluzione: $(\bar{z})^{-2} = \frac{1}{25}(-3+4i)$, .]

Esercizio 7.4: Scrivere $(1+i)^7$ in forma polare.
Suggerimento. Si usino $|1+i| = \sqrt{2}$ *e* $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ *e le formule di De Moivre.*

[Soluzione: $\sqrt{2^7}\left(\cos\left(7\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(7\frac{\pi}{4}\right)\right)$.]

Esercizio 7.5: Calcolare le parti reale e immaginaria di $(1+i)/(1-i)$ e di $(1-i)/(1+i)$.

[Soluzione: Le parti reali sono entrambe nulle. Le parti immaginarie sono rispettivamente $+1$ e -1.]

Esercizio 7.6: Calcolare in forma cartesiana $\left(\frac{3-2i}{-i}\right)^2$.

[Soluzione: $2+3i$.]

Esercizio 7.7: Esprimere $e^{2\pi-\pi i}$ in forma cartesiana e polare.

Suggerimento. Usare la formula $e^{(a+ib)} = e^a(\cos b + i \sin b)$.

Esercizio 7.8: Risolvere l'equazione $z^3 = -2$ in $\mathbb{C}$.

Esercizio 7.9: Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $z^3 = i|z|\overline{z}$.
Suggerimento. Scrivere z *nella forma* $z = re^{i\theta}$.

Esercizio 7.10: Risolvere, in $\mathbb{C}$, $z^3 - |z| = 0$.
Suggerimento. Scrivendo z *nella forma* $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta$, *l'equazione diviene* $\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho$.

[Soluzione: $z = 0$ e $z = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ per $k = 0, 1, 2, \ldots$.]

7.2 Operatori differenziali

Esercizio svolto: Dato il campo vettoriale $f(x, y, z) = (x^2 - y, -xy^2, 2z - x)$, dire se è possibile che esista un campo vettoriale g tale che $\operatorname{rot} g(x, y, z) = f(x, y, z)$.
Svolgimento. Sappiamo che per ogni campo v, si ha $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$. Osserviamo che

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = 2x - 2x + 2 = 2 \neq 0.$$

Quindi non può esistere una g con le proprietà richieste.

Esercizio svolto: Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 assegnata, e sia $v(x, y, z) = (x, -2xy, z^2)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $\operatorname{rot}(v + \nabla\varphi)$.
Svolgimento. Siccome $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$, si ha

$$\operatorname{rot}(v + \nabla\varphi) = \operatorname{rot}(v) = (0, 0, -2y).$$

Esercizio 7.11: Date le funzioni $f(x, y, z) = x^2 \sin(x - y)$ ed il campo vettoriale $g(x, y, z) = (xy, 1 - y, 0)$, calcolare il valore della seguente espressione:

$$\operatorname{rot}\Big(\nabla f(x, y, z)\Big) + \operatorname{div}\Big(g(x, y, z)\Big)\nabla f(x, y, z).$$

Esercizio 7.12: Determinare (se possibile) uno dei campi vettoriali g tali che $\operatorname{rot} g(x, y, z) = (x, -y, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.
Suggerimento. Posto $f = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, *deve risultare*

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = x, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} = -y, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Attenzione! Non c'è unicità.

Esercizio 7.13: Sia $v(x, y, z) = (x, y, xy-z)$, scrivere un campo w con la proprietà che $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} w$ e tale che la differenza $v - w$ sia non costante.
Suggerimento. Sfruttare il fatto che $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$ *qualunque sia la funzione* $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 7.14: Siano $f(x, y, z) = x^2 - y + xz$ e $v(x, y, z) = (x - y, x^2z + y, zy - 2x)$. Calcolare

$$\operatorname{rot}(f(x, y, z)v(x, y, z)) - \nabla f(x, y, z) \wedge v(x, y, z)$$

e

$$\operatorname{div}(f(x, y, z)v(x, y, z)) - f(x, y, z) \operatorname{rot}(v(x, y, z)).$$

Suggerimento. Sfruttare le formule per $\operatorname{rot}(fv)$ e $\operatorname{div}(fv)$.

Esercizio 7.15: Sia $v(x, y, z) = (x - y, x^2z + y, zy - 2x)$. Calcolare $\operatorname{rot}\Big(\operatorname{rot}(v(x, y, z))\Big)$.

Esercizio 7.16: Si consideri il seguente campo vettoriale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$v_\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ -\alpha^2(x - y^2) \\ \alpha^2 z(1 - 2y). \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di α si ha $\operatorname{div} v_\alpha(1, 1, 1) = 0$.

[Soluzione: $\alpha = 0$, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha = 1 - \sqrt{2}$.]

Esercizio 7.17: Si consideri il seguente campo vettoriale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$v_\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ -\alpha^2(x - y^2) \\ \alpha^2 z(1 - 2y). \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di α si ha che $\operatorname{rot} v_\alpha(-1, 1, 1)$ è ortogonale nel punto $P = (-1, 1, 1)$ alla retta per P passante per l'origine.

[Soluzione: $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$.]

Esercizio 7.18: Si consideri il seguente campo vettoriale :

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2xy \\ -3x^2 y \\ z + y. \end{pmatrix}$$

Determinare il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ in cui $\operatorname{rot} v$ è ortogonale a v.

[Soluzione: È l'unione dei piani di equazione $x = 0$, $y = 1/3$ e $y + z = 0$.]

Esercizio 7.19: Si consideri il seguente campo vettoriale dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha xy \\ -3x^2 y \\ z + y. \end{pmatrix}$$

Si determinino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i punti della retta

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = y + 1, \end{cases}$$

tali che $\operatorname{rot} v_\alpha$ è ortogonale a v_α.

[Soluzione: $\left(1, y, \frac{6y^2}{\alpha - 6y}\right)$ per $y \neq \alpha/6$.]