## Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti

**Def.** Un'*equazioni differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti* è del tipo

$$(C) \qquad u'' + au' + bu = f(t),$$

dove $a$ e $b$ sono coefficienti reali e $f$ una funzione continua. Se $f = 0$ l'equazione si dice *omogenea.* L'equazione differenziale omogenea

$$(O) \qquad u'' + au' + bu = 0,$$

si dice *equazione differenziale omogenea associata a* (C). (la quale a sua volta si dice *equazione completa*).

NOTA: 1) L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di un'equazione diff. del second'ordine OMOGENEA sono uno *spazio lineare*, ovvero: se $u$ e $v$ sono soluzioni lo è anche ogni combinazione lineare $c_1u + c_2v$ con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Si ha subito (per la linearità della derivazione):

$$(c_1u + c_2v)'' + a(c_1u + c_2v)' + b(c_1u + c_2v)$$
$$= c_1(u'' + au' + bu) + c_2(v'' + av' + bv) = 0.$$

2) Se $w$ è una soluzione dell'equazione completa e $u$ è soluzione dell'equazione omogenea, allora $u + w$ è ancora soluzione dell'equazione completa:

$$(u + w)'' + a(u + w)' + b(u + w)$$
$$= (u'' + au' + bu) + (w'' + aw' + bw) = 0 + f = f.$$

3) Se $v$ e $w$ sono due soluzioni di (C), allora $v - w$ è soluzione di $(O)$.

4) Da 1)–3) si ottiene che l'insieme delle soluzioni di $(C)$ è uno *spazio affine* (ovvero la traslazione di uno spazio lineare) della forma $w + \mathcal{S}$, dove $w$ è una qualsiasi soluzione di (C) e $\mathcal{S}$ è lo spazio lineare delle soluzioni di (O).

ESEMPI: 1) L'equazione

$$u'' - u = 0,$$

ovvero $u'' = u$ ha come soluzioni $e^t$ e anche $e^{-t}$, quindi anche tutte le funzioni del tipo $c_1e^t + c_2e^{-t}$ (in particolare sinh e cosh).

2) L'equazione

$$u'' + u = 0,$$

ovvero $u'' = -u$ ha come soluzioni $\cos t$ e $\sin t$, e quindi anche tutte le funzioni del tipo $c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

## Soluzioni di equazioni omogenee

Si può dare un procedimento algoritmico per trovare tutte le soluzioni di

$$(O) \qquad u'' + au' + bu = 0.$$

Per prima cosa si risolve in $\mathbf{C}$ l'*equazione caratteristica*

$$z^2 + az + b = 0.$$

trovandone le radici $z_1$ e $z_2$ (dette *radici caratteristiche*). Si hanno allora tre casi:

1) $z_1 = \lambda - i\mu$, $z_2 = \lambda + i\mu$ ($\mu \neq 0$). Allora le soluzioni di (O) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$e^{\lambda t}(c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t));$$

2) $z_1, z_2 \in \mathbf{R}$ $z_1 \neq z_2$; allora le soluzioni di (O) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t};$$

3) $z_1 = z_2 = \lambda \in \mathbf{R}$. Allora le soluzioni di (O) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$e^{\lambda t}(c_1 t + c_2).$$

## Esercizi

**1)** Si trovi la soluzione $y$ dell'equazione differenziale

$$y'' - 10y = 0$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.

L'equazione caratteristica $z^2 - 10 = 0$ ha come radici $\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$. Dunque la soluzione generale dell'equazione $y'' - 10y = 0$ è data da

$$y(x) = c_1 \exp(\sqrt{10}x) + c_2 \exp(-\sqrt{10}x),$$

la cui derivata è

$$y'(x) = c_1\sqrt{10}\exp(\sqrt{10}x) - c_2\sqrt{10}\exp(-\sqrt{10}x).$$

Le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$ danno

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \\ c_1\sqrt{10} - c_2\sqrt{10} = 1, \end{cases}$$

ovvero

$$c_1 = \frac{\sqrt{10}+1}{2\sqrt{10}}, \qquad c_2 = \frac{\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}}.$$

Dunque la funzione cercata è

$$y(x) = \frac{\sqrt{10}+1}{2\sqrt{10}} \exp(\sqrt{10}x) + \frac{\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}} \exp(-\sqrt{10}x).$$

**2)** Si calcoli la soluzione $u$ dell'equazione differenziale

$$u'' + 2u' + 2u = 0$$

tale che $u'(0) = u(0) = 1$.

L'equazione caratteristica $z^2 + 2z + 2 = 0$ ha come radici $-1 + i$ e $-1 - i$. Dunque la soluzione generale dell'equazione $u'' + 2u' + 2u = 0$ è data da

$$u(x) = e^{-x}\big(c_1 \cos x + c_2 \sin x\big),$$

la cui derivata è

$$u'(x) = -e^{-x}\big(c_1 \cos x + c_2 \sin x\big) + e^{-x}\big(-c_1 \sin x + c_2 \cos x\big).$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 1, \end{cases}$$

ovvero $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. La funzione cercata è quindi

$$u(x) = e^{-x}\big(\cos x + 2 \sin x\big).$$

**Soluzioni di equazioni non omogenee**

Dal momento che sappiamo risolvere l'equazione omogenea associata, basta trovare una soluzione $w$ dell'equazione completa.

Trattiamo solamente il caso in cui al secondo membro dell'equazione completa

$$(C) \qquad u'' + au' + bu = f(t)$$

si ha una funzione della forma

$$f(t) = P(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad \text{oppure} \quad f(t) = P(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

($P$ polinomio di grado $n$). Si considera allora il numero complesso $\xi = \alpha + i\beta$. Si hanno tre casi

1) $\xi$ non è soluzione dell'equazione caratteristica $z^2 + az + b = 0$ (ovvero $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ non è soluzione di (O)). Allora si cerca una soluzione del tipo

$$w(t) = e^{\alpha t}(Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)),$$

con $Q_1$ e $Q_2$ polinomi di grado $n$ da determinarsi sostituendo $w$ in (C);

2) $\xi$ è radice caratteristica di molteplicità 1. Allora si cerca una soluzione del tipo

$$w(x) = te^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$$

con $Q_1$ e $Q_2$ polinomi di grado $n$ da determinarsi come sopra;

2) $\xi$ è radice caratteristica di molteplicità 2; in questo caso deve essere $\beta = 0$. Allora si cerca una soluzione del tipo

$$w(x) = t^2 Q(t) e^{\alpha t}$$

con $Q$ polinomio di grado $n$ da determinarsi come sopra.

NOTA: se $f = f_1 + f_2$ con $f_1$ e $f_2$ della forma sopra descritta, si trovano due soluzioni particolari $w_1$ e $w_2$ (con secondo membro dell'equazione $f_1$ e $f_2$ rispettivamente). Quindi $w = w_1 + w_2$ è soluzione particolare dell'equazione completa.

## Esercizi (continuazione)

**3)** Si determini la soluzione $y$ dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = 4\cos(2x)$$

tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Dato che le soluzioni di $z^2 + 4 = 0$ sono $\pm 2i$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 4y = 0$$

è

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x).$$

Dal momento che $4\cos(2x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$w(x) = x(a\cos(2x) + b\sin(2x)),$$

per cui

$$\begin{aligned} w'(x) &= (a\cos(2x) + b\sin(2x)) \\ &\qquad + 2x(-a\sin(2x) + b\cos(2x)), \\ w''(x) &= 4(-a\sin(2x) + b\cos(2x)) \\ &\qquad - 4x(a\cos(2x) + b\sin(2x)). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned}4\cos(2x) &= w'' + 4w \\ &= 4(-a\sin(2x) + b\cos(2x)) - 4x(a\cos(2x) + b\sin(2x)) \\ &\quad + 4x(a\cos(2x) + b\sin(2x)) \\ &= 4(-a\sin(2x) + b\cos(2x));\end{aligned}$$

dunque otteniamo $a = 0$, $b = 1$ e $w(x) = x\sin(2x)$. La soluzione generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = x\sin(2x) + c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x),$$

la cui derivata è

$$y'(x) = (1 - 2c_1)\sin(2x) + (2x + 2c_2)\cos(2x).$$

Le condizioni iniziali danno $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, per cui la soluzione cercata è

$$y(x) = x\sin(2x).$$

**4)** Si determini la soluzione $y$ dell'equazione differenziale

$$y'' - 10y = -10x^2$$

tale che $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = 0$.

Dato che le soluzioni di $z^2 - 10 = 0$ sono $\pm\sqrt{10}$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata

$$y'' - 10y = 0$$

è

$$y(x) = c_1\exp(\sqrt{10}x) + c_2\exp(-\sqrt{10}x).$$

Dal momento che $-10x^2$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$w(x) = ax^2 + bx + c,$$

per cui

$$w'(x) = 2ax + b, \qquad w''(x) = 2a.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned}-10x^2 &= w'' - 10w = 2a - 10(ax^2 + bx + c) \\ &= -10ax^2 - 10bx + 2a - 10c,\end{aligned}$$

dunque otteniamo

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a - 5c = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{5}.$$

La soluzione generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{5} + c_1 \exp(\sqrt{10}x) + c_2 \exp(-\sqrt{10}x),$$

la cui derivata è

$$y'(x) = 2x + \sqrt{10}c_1 \exp(\sqrt{10}x) - \sqrt{10}c_2 \exp(-\sqrt{10}x).$$

Le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \\ \sqrt{10}c_1 - \sqrt{10}c_2 = 0, \end{cases}$$

ovvero $c_1 = c_2 = 0$. Dunque la funzione cercata è

$$y(x) = -x^2 + \frac{1}{5}.$$

**5)** Si determini la soluzione $y$ dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 3y = e^x$$

tale che $y(0) = -1$ e $y'(0) = -1$.

Dato che le soluzioni di $z^2 + z - 3 = 0$ sono

$$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \qquad \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

la soluzione generica dell'equazione omogenea associata

$$y'' + y' - 3y = 0$$

è

$$y(x) = c_1 \exp(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}x) + c_2 \exp(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}x)$$

Dal momento che $e^x$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$w(x) = ae^x,$$

per cui

$$w'(x) = w''(x) = ae^x.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$e^x = w'' + w' - 3w = -ae^x$$

dunque otteniamo $a = -1$ e $w(x) = -e^x$. La soluzione generale dell'equazione è quindi

$$y(x) = -e^x + c_1 \exp(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x) + c_2 \exp(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x),$$

la cui derivata è

$$y'(x) = \ - e^x + c_1 \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \exp(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x)$$

$$+ c_2 \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \exp(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x).$$

Le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \frac{-1+\sqrt{13}}{2} + c_2 \frac{-1-\sqrt{13}}{2} = 0, \end{cases}$$

ovvero $c_1 = c_2 = 0$. La soluzione cercata è $y(x) = -e^x$.

**6)** Si determini la soluzione $y$ dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y = 4e^{2x}$$

tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Le radici dell'equazione $z^2 - 4z = 0$ sono 2 e $-2$. Dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y = 0$ è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

La funzione $4e^{2x}$ è soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata; cerchiamo quindi una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$w(x) = axe^{2x}.$$

Si ha

$$w'(x) = a(2x+1)e^{2x}, \qquad w''(x) = 4a(x+1)e^{2x},$$

per cui, sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene

$$4e^{2x} = 4a(x+1)e^{2x} - 4axe^{2x} = 4ae^{2x},$$

e quindi $a = 1$ e $w(x) = xe^{2x}$. La soluzione generale è quindi

$$y(x) = xe^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},$$

la cui derivata vale

$$y'(x) = (2x+1)e^{2x} + 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}.$$

Le condizioni iniziali portano al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 = 0, \end{cases}$$

ovvero $c_1 = c_2 = 0$. La funzione cercata è dunque $y(x) = xe^{2x}$.

**7)** Sia $u$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4u'' + u = 1 \\ \\ u(0) = 0 \qquad u'(0) = 3. \end{cases}$$

Si determini $u(\frac{2}{3}\pi)$.

Le radici dell'equazione $4z^2 + 1 = 0$ sono $\pm\frac{1}{2}i$, quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $4u'' + u = 0$ è

$$u(t) = c_1 \sin\frac{t}{2} + c_2 \cos\frac{t}{2},$$

mentre una soluzione particolare di $4u'' + u = 1$ è la costante 1. La soluzione generale dell'equazione $4u'' + u = 1$ è quindi

$$u(t) = 1 + c_1 \sin\frac{t}{2} + c_2 \cos\frac{t}{2}.$$

Derivando si ha

$$u'(t) = \frac{c_1}{2}\cos\frac{t}{2} - \frac{c_2}{2}\sin\frac{t}{2}.$$

Le condizioni $u(0) = 0,\ u'(0) = 3$ danno il sistema

$$\begin{cases} 1 + c_2 = 0 \\ \\ \dfrac{c_1}{2} = 3, \end{cases}$$

ovvero $c_1 = 6,\ c_2 = -1$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = 1 + 6\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}.$$

Sostituendo $t = \frac{2}{3}\pi$ si ottiene

$$u(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2} + 3\sqrt{3}.$$

**8)** Sia $u$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 5u' + 6u = 18x \\ \\ u(0) = 1 \qquad u'(0) = 0. \end{cases}$$

Si determini $u'(1)$.

Le radici di $z^2 - 5z + 6 = 0$ sono 2 e 3. Quindi la soluzione generale dell'equazione

$$u'' - 5u' + 6u = 0$$

è

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

La funzione $18x$ non è soluzione dell'equazione differenziale omogenea, quindi possiamo cercare una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$w(x) = ax + b,$$

per cui $w'(x) = a$ e $w''(x) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$18x = w'' - 5w' + 6w = 6ax + 6b - 5a,$$

ovvero $a = 3$ e $b = 5/2$. Dunque $w(x) = 3x + \frac{5}{2}$. La soluzione generale dell'equazione differenziale completa è

$$u(x) = 3x + \frac{5}{2} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

la cui derivata vale

$$u'(x) = 3 + 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}.$$

Le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{3}{2} \\ 2c_1 + 3c_2 = -3, \end{cases}$$

ovvero $c_1 = -\frac{3}{2}$, $c_2 = 0$. La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$u(x) = 3x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} e^{2x}.$$

Si ha infine

$$u'(x) = 3 - 3e^{2x}$$

e

$$u'(1) = 3 - 3e^2.$$

**9)** Sia $u$ la soluzione dell' equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 4u = 0$$

tale che

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t)\ e^{2t} = 2.$$

Si determini $u(0)$.

L'equazione $z^2 + 4z + 4 = 0$ ha $-2$ come unica radice (doppia); quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(t) = (c_1 t + c_2)e^{-2t}.$$

La condizione di limite da'

$$2 = \lim_{t\to+\infty} u'(t)\ e^{2t} = \lim_{t\to+\infty} (c_1 t + c_2),$$

ovvero $c_1 = 0$ e $c_2 = 2$. Dunque si ha

$$u(t) = 2e^{-2t}, \qquad u(0) = 2.$$

**10)** Sia $u$ la soluzione dell' equazione differenziale

$$u'' - u = 1, \quad \text{tale che} \quad u'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = 0.$$

Determinare $u(0)$.

Le radici di $z^2 - 1 = 0$ sono $\pm 1$. Quindi la soluzione generale di $u'' - u = 0$ è

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

La costante $-1$ è una soluzione particolare dell'equazione completa, quindi la soluzione generale è

$$u(x) = -1 + c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

La condizione al limite da'

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1 + c_1 e^x + c_2 e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{c_1 e^x}{x},$$

ovvero $c_1 = 0$. Imponendo la condizione iniziale

$$1 = u'(0) = -c_2 e^0 = -c_2,$$

si ottiene la soluzione

$$u(x) = -1 - e^{-x},$$

ed il valore cercato $u(0) = -2$.