Capitolo 2

Equazioni differenziali ordinarie

2.1 Generalità e definizioni

In questo capitolo saranno dati per acquisiti i principali risultati di esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni. Ci limiteremo a ricordare alcuni enunciati.

Saranno invece forniti metodi risolutivi ed applicazioni per alcune importanti categorie di equazioni differenziali sia del primo ordine che di ordini superiori.

DEFINIZIONE 2.1 *Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Un'equazione differenziale ordinaria è una equazione che coinvolge f ed un certo numero di sue derivate e vale per ogni $x \in I$.*

ESEMPIO 2.1 Le seguenti sono equazioni differenziali:

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f'(x) = \sin x, \qquad f''(x) + [f'(x)]^2 - 4\cos x f(x) = 0$$

Spesso si usa sostituire una variabile al posto di $f(x)$ sottintendendo la dipendenza da x. Le tre equazioni scritte sopra si trovano anche scritte come

$$y' + xy = 0, \qquad y' = \sin x, \qquad y'' + (y')^2 - 4y\cos x = 0.$$

DEFINIZIONE 2.2 *Si dice* **ordine** *di una equazione differenziale l'ordine della derivata più alta che compare nell'equazione.*

DEFINIZIONE 2.3 *Sia $y = f(x)$ una funzione definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, si dice* **soluzione** *(esplicita) dell'equazione differenziale $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ se $\forall x \in I$ si ha $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$.*

In generale una equazione differenziale può avere più di una soluzione. Ad esempio, l'equazione $y' = y$ ha come soluzioni $y = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$. Il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni può variare ad esempio a seconda dell'ordine o del tipo dell'equazione.

ESEMPIO 2.2

i) $y^2 + (y')^2 = 0$ ammette soltanto la soluzione nulla.

ii) $(y' - y)(y' - 2) = 0$ ha due famiglie di soluzioni ($y = ce^x$ e $y = 2x + c$) ciascuna dipendente da un solo parametro.

iii) $y'' - 2y' + e^x = 0$ ha una famiglia di soluzioni ($y = e^x + c_1 e^{2x} + c_2$) dipendente da due parametri.

Definizione 2.4 *Una famiglia di funzioni dipendente da un certo numero n di parametri si dice* **soluzione generale** *se contiene tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.*

Definizione 2.5 *Chiamiamo* **soluzione particolare** *di una equazione differenziale un singolo elemento scelto nella soluzione generale. In altri termini una soluzione particolare è una soluzione dell'equazione che non dipende da parametri.*

Definizione 2.6 *I vincoli che ci permettono di individuare una soluzione particolare nella famiglia delle soluzioni si dicono* **condizioni iniziali** *se sono date in termini di un solo valore della variabile indipendente.*

Definizione 2.7 *Dati una equazione differenziale ed un insieme di condizioni iniziali, il problema di determinare nella famiglia della soluzione generale la (o le) soluzioni che soddisfino le condizioni iniziali assegnate si dice* **problema di Cauchy**.

Esempio 2.3 La soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' = e^x$ è $y(x) = e^x + c_1 x + c_2$. Assegnamo, ad esempio, le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$; derivando l'espressione di y rispetto a x otteniamo $y'(x) = e^x + c_1$. I parametri c_1 e c_2 devono soddisfare il sistema

$$y(0) = e^0 + c_1 0 + c_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 0 \tag{2.1}$$

$$y'(0) = e^0 + c_1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 1. \tag{2.2}$$

Risulta così determinata la soluzione particolare $y = e^x + x$.

Le condizioni iniziali non sono l'unico modo di individuare una soluzione particolare. Siamo in grado di determinare la stessa soluzione particolare dell'esempio 2.3 (procedendo in maniera analoga – provare per esercizio) anche a partire da $y(0) = 1$ e $y(1) = e + 1$.

In questo caso si parla di **condizioni ai limiti** e di **problema ai limiti**.

Definizione 2.8 *Un'equazione differenziale si dice* **in forma normale** *quando è della forma* $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ *ovvero quando è "risolta" rispetto alla derivata di ordine più alto.*

Per equazioni scritte in forma normale si può dimostrare sotto ampie ipotesi l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. In generale però non è detto che le soluzioni espresse dall'integrale generale dell'equazione siano tutte definite sullo stesso insieme al variare dei parametri $c_1, c_2, \dots c_n$ (ovvero della condizione iniziale). Quando si parla di soluzione di un problema di Cauchy si intende sempre una funzione tale che:

a) è definita in un intervallo contenente il punto x_0 in cui sono assegnate le condizioni iniziali;

b) è derivabile in tutto l'intervallo in cui è definita tante volte quanto lo richiede l'equazione differenziale e soddisfa l'equazione in tutto l'intervallo in cui è definita.

DEFINIZIONE 2.9 *Un'equazione differenziale si dice* **autonoma** *se la variabile indipendente non compare esplicitamente nella sua espressione.*

ESEMPIO 2.4 Le equazioni differenziali dell'esempio 2.3 sono autonome mentre le seguenti non lo sono:

$$y' + x \sin y = 1, \quad xy'' - (x^2 - 1)y' + y^2 = 0, \quad y'' = y^2 + x$$

OSSERVAZIONE 2.1 Se $y(x)$ è soluzione di una equazione differenziale autonoma, sono soluzioni anche tutte le funzioni del tipo $y(x - x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Verificare per esercizio questa affermazione.

Passeremo in rassegna caratteristiche generali e metodi risolutivi per alcune importanti classi di equazioni differenziali.

2.2 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono del tipo

$$y' = a(x)b(y) \tag{2.3}$$

dove a e b sono funzioni continue.

Osserviamo innanzitutto che se y_0 è soluzione dell'equazione $b(y) = 0$ la funzione costante $y(x) = y_0$ soddisfa l'equazione differenziale.

Consideriamo un intervallo J in cui $b(y) \neq 0$ e dividiamo entrambi i membri dell'equazione per $b(y)$:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x).$$

Integriamo entrambi i membri rispetto alla x:

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int a(x)\, dx + c.$$

Con il cambio di variabile $y = y(x)$ nel primo integrale si giunge a

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\, dx + c.$$

Quello che abbiamo scritto è un integrale generale dell'equazione (2.3) anche se scritto in forma implicita. Se $A(x) = \int a(x)\, dx$ e $B(y) = \int \frac{dy}{b(y)}$ allora $B(y) = A(x) + c$. Se siamo in grado di scrivere esplicitamente la funzione B^{-1}, inversa di $B(y)$, l'integrale generale della (2.3) in forma esplicita è $y = B^{-1}(A(x) + c)$.

Esempio 2.5 Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x(y^2+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Dividiamo entrambi i membri per y^2+1 e integriamo tra 0 ed x: $\displaystyle\int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)^2+1}\,dx = \int_0^x t\,dt$ e, dopo il cambio di variabile,

$$\int_{y(0)=1}^{y} \frac{dw}{w^2+1} = \int_0^x t\,dt.$$

Quindi $\arctan(y) - \arctan 1 = x^2/2 + 0$, cioè $y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ed è definita per $|x| < \sqrt{\pi/2}$.

Esempio 2.6 Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y\,y' = 1 \\ y(2) = 2 \end{cases}$.

Integriamo tra 2 ed x:

$$\int_2^x y'(t)\,y(t)\,dt = \int_2^x dt; \qquad \int_2^{y(x)} w\,dw = x - 2;$$

Infine, $y^2 = 2x$ e $y = \sqrt{2x}$. Il segno + è stato scelto in base alla condizione iniziale.

Esempio 2.7 Risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y\,y' = 1 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$.

Procedendo come sopra arriviamo ancora all'espressione $y = \pm\sqrt{2(x-x_0)}$. Una soluzione deve però soddisfare l'equazione differenziale in un intervallo contenente x_0 e, in particolare in x_0 stesso. Dalla condizione iniziale si ha che $y(x_0) = 0$; dall'equazione però deve essere $y'(x_0)\,y(x_0) = 1$. Siamo giunti ad una contraddizione e quindi le funzioni $y = \pm\sqrt{2(x-x_0)}$ **non** sono soluzioni del problema di Cauchy proposto, che quindi non ammette soluzione.

Osserviamo infine che le funzioni $y = \pm\sqrt{2(x-x_0)}$ non sono derivabili in x_0; viene quindi a mancare uno dei requisiti necessari per essere soluzione.

In generale non è detto che un problema di Cauchy abbia soluzione. In caso che questa esista non è detto che sia unica. Perché siano garantite esistenza e unicità della soluzione sono necessarie alcune ipotesi di regolarità sulle funzioni $a(x)$ e $b(y)$ che definiscono la (2.3):

Teorema 2.1 *Condizione necessaria perché il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

ammetta una ed una sola soluzione è che $a(x)$ sia continua in un intorno di x_0 e che $b(y)$ sia lipschitziana in un intorno di $y(x_0)$.

Osservazione 2.2 Una funzione derivabile è anche lipschitziana. Condizione sufficiente perché il problema di Cauchy (2.4) ammetta soluzione unica è che $a(x)$ sia continua in x_0 e che $b(y)$ sia derivabile in $y(x_0)$.

Nel caso dell'esempio 2.7, $a(x) = 1$ è continua ovunque mentre $b(y) = 1/y$ non è continua (né tantomeno lipschitziana) per $y = 0$. Le ipotesi del teorema 2.1 non sono soddisfatte.

In altre situazioni (vedi esempio 2.8) può venire a mancare l'unicità della soluzione.

ESEMPIO 2.8 Consideriamo il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$.
Osserviamo subito che la funzione costante $y(x) = 1$ soddisfa sia l'equazione che la condizione iniziale e che quindi è soluzione del problema di Cauchy.

Dividendo per $\sqrt{1-y^2}$ e integrando si arriva a $\arcsin y = x+c$, ovvero $y(x) = \sin(x+c)$. Inoltre, dalla condizione iniziale $x_0 + c = \pi/2$. La funzione $y(x) = \sin(\pi/2 + (x - x_0))$ soddisfa effettivamente sia l'equazione che la condizione iniziale ed è quindi soluzione del problema di Cauchy.

Abbiamo trovato due soluzioni distinte dello stesso problema. Questo però non è in contraddizione con il teorema 2.1: $b(y) = \sqrt{1-y^2}$ è continua per $y = 1$ ma non lipschitziana.

ESEMPIO 2.9 Consideriamo il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = a \end{cases}$, con $a \geq 0$. Applicando la tecnica esposta in questo paragrafo:

$$\int_0^x \frac{y'}{\sqrt{y}}\,dx = x \quad \text{da cui} \quad \frac{x^2}{2} = \sqrt{y} - \sqrt{a}.$$

Se $a \neq 0$ il metodo fornisce la soluzione $y(x) = (x + 2\sqrt{a})^2/4$. La funzione $b(y) = \sqrt{y}$ è lipschitziana in un intorno di $y = a$; valgono i requisiti per l'unicità della soluzione e quindi non ci sono altre soluzioni oltre a quella trovata.

Se $a = 0$ il metodo fornisce $y(x) = x^2/4$. Però $b(y)$ non è lipschitziana in un intorno di 0: *potrebbero* esserci anche altre soluzioni oltre a quella trovata. È facile verificare che anche la funzione $y \equiv 0$ è soluzione del problema di Cauchy con $a = 0$.

2.3 Equazioni omogenee

DEFINIZIONE 2.10 *Una funzione $f(x, y)$ si dice* **omogenea** *se, $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, $\forall k > 0$ esiste un $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(kx, ky) = k^m f(x, y)$. La quantità m si dice* **grado di omogeneità** *della funzione f.*

L'equazione

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{2.5}$$

si dice **omogenea** quando P e Q sono funzioni omogenee di x ed y dello stesso grado di omogeneità m.

La sostituzione $y(x) = z(x) \cdot x$ riduce P e Q alla forma

$$P(x, zx) = x^m a(z), \qquad Q(x, zx) = x^m b(z)$$

(si osservi che le funzioni a e b non dipendono da x). Inoltre, $y' = z'x + z$. L'equazione differenziale si scrive $b(z)(z'x + z) + a(z) = 0$ ovvero

$$\frac{b(z)}{a(z) + zb(z)} z' = -\frac{1}{x}. \tag{2.6}$$

L'equazione (2.6) è a variabili separabili ed è risolubile con le tecniche del paragrafo 2.2. Il suo integrale generale è

$$\int \frac{b(z)}{a(z)+zb(z)}\,dz + \log|x| = \mathit{costante};$$

una volta calcolato, la sostituzione $z = y/x$ fornisce l'integrale dell'equazione originaria.

Esempio 2.10 Risolviamo l'equazione $y'x^2 + x^2 + y^2 + xy = 0$.

In questo caso $P(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $Q(x,y) = x^2$ sono funzioni omogenee di grado due. Introduciamo la nuova incognita $z(x)$ definita da $y = zx$;

$$\begin{array}{ll} P(x,zx) = x^2\cdot(1+z^2+z), & Q(x,zx) = x^2\cdot 1, \quad \text{ovvero} \\ a(z) = 1+z+z^2 & b(z) = 1. \end{array}$$

L'equazione differenziale per z è $z'x + z = 1 + z^2 + z$. Semplificando e integrando si giunge a

$$\frac{dz}{1+z^2} = -\log|x| + c, \quad \text{e quindi a} \quad z = \tan(-\log|x| + c).$$

Sostituendo $z = y/x$ si arriva alla soluzione dell'equazione differenziale:

$$y = x\tan(-\log|x| + c).$$

2.4 Equazioni lineari

Definizione 2.11 *Sia $F(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ una funzione continua. L'equazione differenziale $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = f(x)$ si dice* **lineare** *se lo è la funzione F ovvero se*

$$\begin{aligned} aF(z_0, z_1, \ldots, z_n) \; + \; & bF(w_0, w_1, \ldots, w_n) = \\ = \; & F(az_0 + bw_0, az_1 + bw_1, \ldots, az_n + bw_n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. La funzione $f(x)$ si dice **termine noto** *dell'equazione.*

Un'equazione lineare si dice **omogenea** *se $f(x) \equiv 0$; si dice* **completa** *in caso contrario.*

In base alla definizione precedente, una generica equazione differenziale lineare è della forma

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = f(x).$$

Definizione 2.12 *Le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, definite su uno stesso dominio D si dicono* **linearmente dipendenti** *se esistono delle costanti c_1, c_2, ..., c_n, non tutte nulle, tali che $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x) = 0$ per ogni $x \in D$. Si dicono* **linearmente indipendenti** *in caso contrario.*

Si può dimostrare che se le funzioni$f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ sono derivabili n volte, sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono i vettori

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_1^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_2(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_2^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} f_n(x_0) \\ f_n'(x_0) \\ \vdots \\ f_n^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$.

I risultati seguenti descrivono la struttura della soluzione generale per equazioni lineari omogenee e complete rispettivamente:

Teorema 2.2 *Le soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea costituiscono uno spazio vettoriale la cui dimensione è pari all'ordine dell'equazione.*

Dimostrazione. Una equazione lineare omogenea ha la forma

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.8}$$

con F lineare. Osserviamo che esiste sempre almeno una soluzione (quella identicamente nulla). Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni, allora

$$F(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) = 0 \quad e \quad F(y_2, y_2', \dots, y_2^{(n)}) = 0.$$

Per la (2.7), $F(ay_1 + by_2, (ay_1 + by_2)', \dots, (ay_1 + by_2)^{(n)}) = 0$ ovvero $ay_1(x) + by_2(x)$ è soluzione. Quindi l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.

Consideriamo ora le soluzioni y_1, y_2, $\dots$, y_n dei problemi di Cauchy con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \\ \quad\vdots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(x_0) = 0 \\ y_1'(x_0) = 1 \\ \quad\vdots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}, \quad \dots, \quad \begin{cases} y_1(x_0) = 0 \\ y_1'(x_0) = 0 \\ \quad\vdots \\ y_1^{(n)}(x_0) = 1 \end{cases}.$$

Le funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono soluzioni linearmente indipendenti. Dimostriamo che le soluzioni della (2.8) sono tutte e sole le combinazioni lineari di $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Per la linearità le combinazioni lineari sono soluzioni; viceversa, sia y la soluzione del generico problema di Cauchy per la (2.8), con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(x_0) = w_1 \\ y'(x_0) = w_2 \\ \quad\vdots \\ y^{(n)}(x_0) = w_n \end{cases};$$

Ancora per la linearità dell'equazione anche $w_1 y_1 + w_2 y_2 + \ldots + w_n y_n$ è soluzione del problema di Cauchy e quindi per l'unicità della soluzione deve essere $y = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \ldots + w_n y_n$ ovvero le soluzioni dell'equazione (2.8) sono tutte e sole le combinazioni lineari di n funzioni linearmente indipendenti e quindi formano uno spazio vettoriale di dimensione n. $\square$

Teorema 2.3 *Le soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea*

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x) \tag{2.9}$$

formano una varietà lineare affine di dimensione pari all'ordine dell'equazione.

Dimostrazione. Sia $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = f(x)$ un'equazione differenziale non omogenea e sia $y_0(x)$ una sua soluzione. È sufficiente dimostrare che se $y(x)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione, le $z(x) = y(x) - y_0(x)$ formano uno spazio vettoriale di dimensione n, cioè pari all'ordine dell'equazione (2.9).

Dalla linearità di F segue

$$\begin{aligned} F(z, z', \ldots, z^{(n)}) &= F(y - y_0, y' - y_0', \ldots, y^{(n)} - y_0^{(n)}) = \\ &= F(y, y', \ldots, y^{(n)}) - F(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) = f(x) - f(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

ovvero z è soluzione dell'equazione lineare omogenea $F(z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0$ associata alla (2.9). Per il teorema 2.2 le soluzioni z dell'equazione omogena formano uno spazio vettoriale di dimensione n e questo conclude la dimostrazione. □

Il corollario seguente riconduce la soluzione di un'equazione non omogenea a determinarne una soluzione particolare e alla soluzione dell'equazione omogenea associata. Ne faremo ampio uso nelle applicazioni.

Corollario 2.1 *La soluzione di una equazione lineare non omogenea (2.9) si può scrivere nella forma $y(x) = y_0(x) + z(x)$ dove y_0 è una soluzione particolare dell'equazione completa e z è la soluzione generale dell'equazione omogenea $F(z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0$ associata alla (2.9).*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, $y(x) - y_0(x) = z(x)$. Se fissiamo y_0, ogni soluzione y si scrive in uno ed un sol modo come somma di y_0 e di una soluzione dell'equazione omogenea associata. □

2.4.1 Equazioni lineari del primo ordine

Sono equazioni della forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{2.10}$$

con a ed f continue nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Per il corollario 2.1 la soluzione dell'equazione completa si riduce a

i) risolvere l'equazione omogenea associata;

ii) determinare una soluzione particolare dell'equazione omogenea.

Soluzione dell'equazione omogenea. L'equazione $z' + a(x)z = 0$ può essere risolta per separazione delle variabili.

Si vede subito che l'equazione ammette la soluzione identicamente nulla (come era ovvio aspettarsi dato che le sue soluzioni formano uno spazio vettoriale).

Se $z(x_0) \neq 0$ per un certo x_0 allora $z(x) \neq 0$ in un opportuno intorno di x_0; possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione per $z(x)$ e integrare:

$$\int_{z(x_0)}^{z(x)} \frac{u'}{u}\, dx = -\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt, \quad \text{da cui} \quad \log\left(\frac{z(x)}{z(x_0)}\right) = -\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt.$$

L'equazione omogenea è soddisfatta da tutte le funzioni del tipo

$$z(x) = c \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}, \qquad c \text{ costante.}$$

Si noti che le soluzioni sono tutte linearmente dipendenti come era lecito aspettarsi in base al teorema 2.2.

Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare della (2.10).

Il metodo consiste nel cercare soluzioni particolari di forma "simile" alla soluzione dell'equazione omogenea. È applicabile anche ad equazioni lineari di ordine superiore al primo e talvolta anche ad equazioni non lineari (vedi ad esempio l'equazione di Bernoulli, § 2.5).

Per le equazioni lineari del primo ordine cerchiamo soluzioni particolari della forma

$$y_0(x) = c(x)\, e^{-A(x)}, \quad \text{dove} \quad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt. \tag{2.11}$$

La costante c che figura nell'espressione della soluzione della (2.8) è stata sostituita da una funzione $c(x)$, da cui il nome di "variazione della costante".

Deriviamo la (2.11) e sostituiamo l'espressione nella (2.10):

$$\underbrace{a(x)\, c(x)\, e^{-A(x)}}_{a(x)\, y(x)} \quad + \quad \underbrace{c'(x)\, e^{-A(x)} - c(x)\, a(x)\, e^{-A(x)}}_{y'(x)} \quad = \quad f(x)$$

da cui $c(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)}\, dt$. Una soluzione particolare della (2.10) (quella che soddisfa la condizione iniziale $y(x_0) = 0$) è $y_0(x) = e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)}\, dt$.

Per il corollario 2.1, la soluzione generale della (2.10) è,

$$y(x) = c\, e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)}\, dt.$$

Soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = w_0 \end{cases} . \tag{2.12}$$

Abbiamo già visto come determinare la soluzione $y_0(x)$ del problema (2.12) nel caso $w_0 = 0$. Inoltre sappiamo che la soluzione che cerchiamo è della forma $y_0(x) + z(x)$ dove, per la linearità delle condizioni iniziali (oltre che dell'equazione) soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(x) + a(x)z(x) = 0 \\ z(x_0) = w_0 \end{cases} .$$

Quindi, $z(x) = e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)}\, dt$; la soluzione del problema (2.12) è allora

$$y(x) = y_0\, e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)}\, dt.$$

Esempio 2.11 Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' + y \sin x = \sin 2x$. Poi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \sin x = \sin 2x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} .$$

Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea:

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \cos x + k \quad \Rightarrow \quad y = c\, e^{\cos x},$$

(c e k costanti).

Cerchiamo, con il metodo della variazione della costante, una soluzione per l'equazione completa tra le funzioni della forma $y(x) = c(x)\, e^{\cos x}$:

$$c'(x)\, e^{\cos x} + c(x) \sin x\, e^{\cos x} - c(x) \sin x\, e^{\cos x} = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad c'(x) = e^{-\cos x} \sin 2x.$$

Determiniamo $c(x)$ calcolando l'integrale (per parti)

$$c(x) = \int^x [\, e^{-\cos t} \sin t\,] \cdot [\, 2\cos t\,]\, dt = 2\, e^{-\cos x} \cos x + \int^x 2\, e^{-\cos t} \sin t\, dt$$

cioè $c(x) = 2\, e^{-\cos x}(1 + \cos x)$. L'integrale generale è quindi

$$y(x) = c\, e^{\cos x} + 2\, e^{-\cos x}(1 + \cos x). \tag{2.13}$$

Per risolvere il problema di Cauchy è sufficiente imporre la condizione iniziale nella (2.13):

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^0(1+0) + ce^0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = -1;$$

e quindi $y(x) = 2e^{-\cos x}(1 + \cos x) - e^{\cos x}$.

2.4.2 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Sono equazioni lineari, di ordine qualsiasi in cui i coefficienti delle incognita e delle sue derivate sono costanti:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{2.14}$$

Per quanto detto in precedenza, le soluzioni dell'equazione formano uno spazio vettoriale di dimensione n; esistono quindi n soluzioni y_1, y_2, …, y_n linearmente indipendenti.

Per fissare le idee, partiamo dalle equazioni del primo ordine

$$a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{2.15}$$

Questa equazione particolare può essere vista anche come equazione a variabili separabili o come equazione lineare omogenea del primo ordine. Qualunque metodo risolutivo si scelga (provarli entrambi per esercizio) la soluzione generale è $y(x) = c\, e^{\lambda x}$ dove $\lambda = -a_0/a_1$.

Le funzioni esponenziali sono tali che $\dfrac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$; se sostituiamo funzione e derivata nell'equazione (2.15) si ha $(a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$. Perché questa uguaglianza sia vera per ogni x, (ovvero perché l'esponenziale sia soluzione della (2.15)), deve essere $a_1\lambda + a_0 = 0$ ovvero $\lambda = -a_0/a_1$.

Il coefficiente λ dell'esponente è la soluzione di una equazione algebrica di primo grado associata all'equazione differenziale.

Queste considerazioni possono essere estese alle equazioni di ordine superiore al primo. Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ nell'equazione (2.14) si ha

$$e^{\lambda x}(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

La funzione $y = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se λ soddisfa l'equazione algebrica

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{2.16}$$

Inoltre se $\lambda \neq \mu$ le funzioni $e^{\lambda x}$ e $e^{\mu x}$ sono linearmente indipendenti.

Se le radici λ_1, λ_2, ..., λ_n dell'equazione (2.16) (reali o complesse che siano) sono tutte distinte, abbiamo trovato n soluzioni e^{λ_1},e^{λ_2}, ..., e^{λ_n} dell'equazione differenziale (2.14) linearmente indipendenti. Abbiamo trovato una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni della (2.14). La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_1\, e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\, e^{\lambda_n x}.$$

Le cose cambiano in presenza di radici multiple dell'equazione (2.16): non abbiamo più a disposizione n valori distinti per λ. Procedendo come sopra non ci sono abbastanza elementi per costruire una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dato che non abbiamo più a disposizione n soluzioni linearmente indipendenti.

Esaminiamo un semplice esempio: costruiamo una equazione differenziale a partire da una equazione algebrica con una radice doppia ($\lambda = a$, con $a \neq 0$):

$$\text{a} \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0 \quad \text{corrisponde l'eq. diff.} \quad y'' - 2ay' + a^2 y = 0;$$

L'equazione differenziale si può scrivere anche come

$$(y' - ay)' - a(y' - ay) = 0. \tag{2.17}$$

Introduciamo la nuova incognita $z = y' - ay$ e risolviamo l'equazione $z' - az = 0$ ottenuta sostituendo nella precedente. $z = 0$ è soluzione e quindi la (2.17) è soddisfatta dalle y tali che $y' - ay = 0$, ovvero da $y = c_1 e^{ax}$.

L'equazione per z ha però anche la soluzione non nulla $z = e^{ax}$. Risolvendo $y' - ay = e^{ax}$ (vedi paragrafo 2.4.1) scopriamo che $y = c_2 x e^{ax}$ soddisfa ancora la (2.17) ed è linearmente indipendente da e^{ax}. La soluzione generale della (2.17) è allora:

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}.$$

Nel caso di una radice doppia $\lambda = a$ della (2.16), l'equazione differenziale ammette come soluzione non solo e^{ax} ma anche xe^{ax}.

Generalizzando, nel caso di una radice λ di molteplicità m della (2.16) sono soluzioni della (2.14) le funzioni e^{ax}, xe^{ax}, ..., $x^{m-1}e^{ax}$.

Da una radice di molteplicità m otteniamo m soluzioni linearmente indipendenti. Inoltre, per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado n ha esattamente n radici complesse se contate con la loro molteplicità. Questo significa che anche nel caso di radici multiple siamo in grado di scrivere una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

Esempio 2.12 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}.$$

L'equazione è del secondo ordine. Le soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Per trovare una base per la soluzione generale abbiamo bisogno di due soluzioni linearmente indipendenti.

L'equazione caratteristica associata all'equazione diffrenziale è $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$; le sue soluzioni sono $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$.

Entrambe le radici hanno molteplicità 1; una base per lo spazio delle soluzioni è ad esempio $\{e^{(-1+i\sqrt{2})x}, e^{(-1-i\sqrt{2})x}\}$, mentre la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 e^{(-1+i\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1-i\sqrt{2})x}.$$

Derivando,

$$y'(x) = (-1 + i\sqrt{2})\, c_1\, e^{(-1+i\sqrt{2})x} + (-1 - i\sqrt{2})\, c_2\, e^{(-1-i\sqrt{2})x}.$$

Imponiamo che siano soddisfatte le condizioni iniziali. Si giunge al sistema:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = (-1 + i\sqrt{2})\, c_1 + (-1 - i\sqrt{2})\, c_2 = 2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ c_1 - c_2 & = -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} c_1 & = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ c_2 & = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) e^{(-1+i\sqrt{2})x} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) e^{(-1-i\sqrt{2})x}. \tag{2.18}$$

Abbiamo risolto un problema di Cauchy *reale* trovando una soluzione che, apparentemente, non lo è. D'altra parte abbiamo scelto una base complessa nonostante lo spazio delle soluzioni sia costituito da funzioni reali.

Facendo un po' di calcoli si riesce a scrivere la (2.18) come funzione reale:

$$y(x) = e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)$$

Si noti che le funzioni $e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)$ e $e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale e sono linearmente indipendenti. Sono una base (reale questa volta!) per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

Osservazione 2.3 È sempre possibile trovare una base reale per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

Osserviamo innanzitutto che se un polinomio a coefficienti reali ammette la radice complessa $\lambda = a + ib$ allora deve ammettere anche la radice $\overline{\lambda} = a - ib$.

Quindi se $e^{(a+ib)x}$ è soluzione dell'equazione differenziale, lo è anche $e^{(a-ib)x}$. Sfruttando le proprietà dell'esponenziale complessa e le formule di Eulero,

$$\begin{aligned} e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x} &= e^{ax}(e^{ibx} + e^{-ibx}) &&= 2\, e^{ax}\cos bx \\ e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x} &= e^{ax}(e^{ibx} - e^{-ibx}) &&= 2i\, e^{ax}\sin bx \end{aligned}$$

Quindi lo spazio vettoriale generato da $e^{(a+ib)x}$ e $e^{(a-ib)x}$ coincide con quello generato dalle funzioni reali $e^{ax}\cos(bx)$ e $e^{ax}\sin(bx)$. Anche in presenza di una coppia di radici complesse coniugate è sempre possibile scrivere la soluzione generale come combinazione lineare di funzioni a valori reali.

Esempio 2.13 Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

L'equazione associata è $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ ed ammette le soluzioni $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ entrambe di molteplicità due.

Lo spazio vettoriale V delle soluzioni ha dimensione 4. Da ciascuna delle due radici si ricavano due elementi per la base di V. Ad esempio, $V = \langle e^{ix}, xe^{ix}, e^{-ix}, xe^{-ix} \rangle$.

In base all'osservazione 2.3 una base reale per V è $\{\cos(x), \sin(x), x\cos(x), x\sin(x)\}$. Utilizzando quest'ultima base, la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + c_3\, x\cos(x) + c_4\, x\sin(x).$$

Esempio 2.14 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione è del terzo ordine. Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione 3. Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ (doppia). La soluzione generale è

$$y(x) = c_0 + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} & & y(0) &= c_0 + c_1 = 1 \\ y'(x) &= (c_2 - c_1)e^{-x} - c_2 x e^{-x} & y'(0) &= c_2 - c_1 = 1 \\ y''(x) &= c_1 e^{-x} - c_2 e^{-x} - c_2 e^{-x} & y''(0) &= c_1 - 2c_2 = 1 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si trova $c_0 = 4$, $c_1 = -3$, $c_2 = -2$.

La soluzione del problema di Cauchy è: $y(x) = 4 - 3e^{-x} - 2xe^{-x}$.

2.4.3 Equazioni non omogenee a coefficienti costanti

Per la linearità dell'equazione, la soluzione generale delle equazioni complete sarà del tipo "soluzione particolare + soluzione dell'eq. omogenea". Sappiamo già risolvere le equazioni omogenee; ci resta solo da determinare una soluzione particolare.

È possibile determinare una soluzione particolare con il metodo della variazione della costante come abbiamo già fatto in altri casi.

Esempio 2.15 Determinare la soluzione particolare dell'equazione

$$y' - y = e^{t+1}.$$

Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea: $y' - y = 0$. La soluzione generale è $y(t) = ce^t$.

Cerchiamo poi una soluzione particolare con la variazione della costante: cerchiamo una soluzione del tipo $c(t)e^t$. Derivando e sostituendo nell'equazione completa, $c(t)$ deve soddisfare l'equazione differenziale

$$c'(t)e^t = e^{t+1} \qquad \text{ovvero} \qquad c'(t) = e \qquad \text{e} \qquad c(t) = et + \mathit{costante}.$$

Possiamo scegliere la *costante* $= 0$; come soluzione particolare abbiamo allora te^{t+1}; la soluzione generale dell'equazione è $y(t) = ce^t + te^{t+1}$.

Nel caso di equazioni di ordine superiore al primo l'uso della variazione della costante si complica e si va incontro a cacoli piuttosto pesanti.

Per alcune forme particolari del termine noto è possibile sfruttare informazioni "a priori" sulla forma della soluzione particolare. Questo ci permette di cercare le soluzioni particolari in classi molto ristrette di funzioni, evitando così il metodo della variazione della costante.

Caso I: Il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea

Supponiamo per il momento che **il termine noto non sia una soluzione dell'equazione omogenea**. Vedremo in seguito come ci si comporta in caso contrario. Esaminiamo alcuni dei casi più comuni:

Termine noto della forma "$\boldsymbol{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}$"

Le derivate di combinazioni lineari di seni e coseni sono ancora combinazioni lineari dei seni e coseni. Se il termine noto è di questa forma, esistono soluzioni particolari della forma $\boldsymbol{c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)}$.

Rispetto alla variazione della costante, dove era necessario risolvere una equazione differenziale per determinare la soluzione particolare, qui è sufficiente risolvere un sistema lineare per determinare i due cofficienti c_1 e c_2.

Vale la pena osservare che in generale è necessario cercare soluzioni particolari con entrambi gli addendi anche nel caso in cui il termine noto contenga solo una delle due funzioni trigonometriche. Si noti che le derivate di ordine dispari di un seno sono coseni e viceversa. È possibile trovare soluzioni particolari in cui compare solo una funzione trigonometrica solo nel caso in cui compaiano soltanto derivate di ordine pari (nella soluzione particolare compare la stessa funzione trigonometrica del termine noto) o soltanto di ordine dispari (nella soluzione particolare compare solo la funzione trigonometrica che non figura nel termine noto).

Osservazione 2.4 Si noti che se il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea, (in altri termini se $\lambda = i\omega$ è soluzione dell'equazione caratteristica), tutte le funzioni del tipo $c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$ annullano il primo membro dell'equazione.

Esempio 2.16 Trovare una soluzione particolare di $y' - y = 3\sin(2t)$.

L'equazione omogenea è soddisfatta dalle funzioni ce^t; il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea.

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$. Deriviamo e sostituiamo nell'equazione:

$$y'(t) - y(t) = -2c_1\sin(t) + 2c_2\cos(t) - c_1\cos(2t) - c_2\sin(2t) = 3\sin(2t) + 0\cos(2t).$$

Semplificando e uguagliando i coefficienti di $\sin(2t)$ e di $\cos(2t)$ si giunge al sistema

$$\begin{cases} -2c_1 - c_2 & = 3 \\ 2c_2 - c_1 & = 0 \end{cases} \qquad \text{che è soddisfatto da} \qquad \begin{cases} c_1 = -6/5 \\ c_2 = -3/5 \end{cases}.$$

La funzione $y(t) = -\dfrac{6}{5}\sin(2t) - \dfrac{3}{5}\cos(2t)$ è la soluzione particolare cercata.

Termine noto della forma “ae^{bt}”

Le derivate delle funzioni esponenziali sono ancora esponenziali con lo stesso esponente. Sempre supponendo che il termine noto non soddisfi l'equazione (in termini di equazione caratteristica supponiamo che b non sia soluzione), si cercano soluzioni particolari della forma $\boldsymbol{ce^{bt}}$.

Il problema è ricondotto alla soluzione di un'equazione di primo grado nell'incognita c.

Termine noto polinomiale

Le derivate dei poinomi sono ancora polinomi ma di grado inferiore. Se il termine noto è un polinomio $\boldsymbol{p(t)}$ di grado k e non soddisfa l'equazione omogenea (cioè zero non è soluzione di molteplicità k dell'equazione caratteristica), l'equazione ammette una soluzione particolare polinomiale $\boldsymbol{q(t)}$ di grado k.

Termine noto della forma “$(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t))e^{ct}$ ”

Si cercano soluzioni particolari della stessa forma del termine noto. Il problema è ricondotto a determinare i coefficienti di seno e coseno.

Termine noto della forma “polinomio per esponenziale”

Se il termine noto è del tipo $\boldsymbol{p(t)e^{ct}}$, si cercano soluzioni della forma “$\boldsymbol{q(t)e^{ct}}$ “ dove $q(t)$ è un polinomio dello stesso grado di $p(t)$.

Termine noto della forma “$(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t))\, p(t)$”

Si cercano soluzioni della forma $\boldsymbol{(c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t))\, q(t)}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si determinano c_1, c_2 ed i coefficienti di $q(t)$.

Osservazione 2.5 Per le equazioni lineari vale quello che i fisici chiamano “principio di sovrapposizione degli effetti”: supponiamo di avere un'equazione lineare della forma

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = f(x) + g(x). \tag{2.19}$$

Sia $y_1(x)$ una soluzione di $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = f(x)$ e sia $y_2(x)$ una soluzione di $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = g(x)$; sommando membro a membro, la funzione $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ soddisfa la (2.19).

Esempio 2.17 Risolviamo l'equazione differenziale $y' - y = \sin(2t) + e^{-t} + t$.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y(t) = ce^t$. Per trovare una soluzione particolare sfruttiamo l'osservazione 2.5 e scomponiamo il termine noto esaminando un'addendo alla volta.

i) Esaminiamo il primo addendo del termine noto. Cerchiamo una soluzione particolare di $z_1' - z_1 = \sin(2t)$ della forma $z_1 = a\sin(2t) + b\cos(2t)$.

$$z_1' - z_1 = (a - 2b)\sin(2t) + (2a + b)\cos(2t) = 1\sin(2t) + 0\cos(2t).$$

Quindi

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \qquad \text{che ha soluzione} \qquad \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/3 \end{cases} .$$

Allora, $z_1(t) = \dfrac{1}{3}(\sin(2t) - \cos(2t))$.

ii) Consideriamo or $z_2' - z_2 = e^{-t}$. Cerchiamo una soluzione della forma $z_2 = ae^{-t}$.

$$z_2' - z_2 = -ae^{-t} - ae^{-t} = e^{-t}, \qquad \text{da cui} \qquad a = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{1}{2}e^{-t}.$$

iii) Resta da considerare $z_3' - z_3 = t$. Questa volta il prototipo per la soluzione particolare è il generico polinomio di primo grado $z_3 = at + b$.

$$z_3' - z_3 = -at + (a - b) = t. \qquad \begin{cases} a = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

e quindi $z_3 = -t - 1$.

Una soluzione particolare dell'equazione differenziale per la y è

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{3}(\sin(2t) - \cos(2t)) + \frac{1}{2}e^{-t} + (-t + 1).$$

Infine, la soluzione generale è

$$y = ce^t + \frac{1}{3}(\sin(2t) - \cos(2t)) + \frac{1}{2}e^{-t} + (-t + 1).$$

Caso II: Il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea

Esaminiamo un paio di esempi tanto per fissare le idee:

Esempio 2.18 Risolviamo l'equazione: $y' - y = e^t$. Al solito risolviamo l'equazione omogenea: $y = ce^t$. Per come è fatto il termine noto dovremo cercare soluzioni particolari del tipo $y_1 = ae^t$. y_1 però è soluzione dell'equazione omogenea, quindi $y_1' - y_1 = 0$ qualunque sia a.

Proviamo a cercare soluzioni della forma $y_1 = ate^t$:

$$y_1' - y_1 = (a + at)e^t - ate^t = ae^t.$$

Confrontando con il termine noto e^t si trova $a = 1$. $y_1 = te^t$ è una soluzione particolare dell'equazione. Per avere la soluzione generale y basta sommare a y_1 la soluzione generale dell'equazione omogenea: $y = c_1e^t + c_2te^t$.

Esempio 2.19 Risolviamo l'equazione $y'' - 2y' + y = e^t$.

L'equazione caratteristica è $(\lambda - 1)^2 = 0$. La soluzione $\lambda = 1$ è doppia. La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = ae^t + bte^t$. Sia e^t che te^t sono soluzioni dell'equazione omogenea. Proviamo a cercare soluzioni del tipo $y_1 = at^2e^t$.

Sostituendo, $y_1'' - 2y' + y = \ldots = 2ae^t = e^t$ da cui si ricava $a = 1/2$.

$y_1 = \frac{1}{2}t^2e^t$ è una soluzione particolare. La soluzione generale è $\frac{1}{2}t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t$.

Dagli esempi si può estrapolare la regola generale: nel caso in cui il termine noto sia soluzione dell'equazione omogenea, si dovrà cercare una soluzione particolare della forma considerata nel caso I moltiplicata per t^m dove m è la molteplicità della radice dell'equazione caratteristica corrispondente al termine noto preso in esame.

Nell'esempio 2.18 al termine noto e^t corrisponde la soluzione $\lambda = 1$ dell'equazione caratteristica. La soluzione è semplice e quindi come prototipo per la soluzione particolare abbiamo scelto ate^t.

Nell'esempio 2.19 la soluzione dell'equaizione caratteristica che corrisponde al termine noto (sempre $\lambda = 1$) è doppia. Il prototipo utilizzato è infatti at^2e^t.

ESEMPIO 2.20 Determinare una soluzione particolare dell'equazione $y^{(5)} - y''' = t + 1$.

Al termine noto (polinomiale) corrisponde la soluzione $\lambda = 0$ (tripla) dell'equazione caratteristica. Il prototipo per la soluzione particolare è $t^3(at + b)$.
Facendo i calcoli troviamo $a = 1/24$, $b = 1/6$ ovvero $y = \dfrac{1}{24}t^4 + \dfrac{1}{6}t^3$.
Per esercizio scrivere la soluzione generale dell'equazione.

2.5 Equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli è una equazione del primo ordine, non lineare, della forma

$$y' + a(t)y = b(t)y^n. \tag{2.20}$$

È possibile ricondurre l'equazione ad una lineare mediante una opportuna sostituzione. Introduciamo la nuova incognita $z(t)$ definita da $y = z^\alpha$ dove α è un parametro che ci riserviamo di scegliere in seguito; si ha $y' = \alpha z^\alpha z'$ e, sostituendo nella (2.20),

$$\alpha z^{\alpha-1}z' + az^\alpha = bz^{n\alpha}.$$

Se scegliamo α in modo tale che $\alpha - 1 = n\alpha$ (ovvero $\alpha = 1/(1-n)$), è possibile raccogliere a fattor comune e semplificare nell'eq precedente un fattore $z^{\alpha-1}$:

$$z^{\alpha-1}(\alpha z' + az) = z^{\alpha-1} \cdot b, \qquad \text{cioè} \qquad \alpha z' + az = b. \tag{2.21}$$

Ci siamo ricondotti ad una equazione lineare risolvibile con le tecniche del paragrafo 2.4.1. Facendo i calcoli e tenendo presente che $1/\alpha = 1 - n$,

$$z(t) = c\,e^{(n-1)A(t)} + (1-n)e^{(n-1)A(t)} \int_{x_0}^{t} b(t)\,e^{(n-1)A(\tau)}\,d\tau.$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$. Infine,

$$y(t) = \left\{ c\,e^{(n-1)A(t)} + (1-n)e^{(n-1)A(t)} \int_{x_0}^{t} b(t)\,e^{(n-1)A(\tau)}\,d\tau \right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

ESEMPIO 2.21 Risolvere l'equazione di Bernoulli $y' + xy = xy^3$.

Poniamo $y = z^\alpha$. Sostituendo, $\alpha z^{\alpha-1}z' + xz = z^{3\alpha}$. Scegliamo α tale che $\alpha - 1 = 3\alpha$, cioè $\alpha = -1/2$. L'equazione per z è

$$z' - 2xz = -2x. \tag{2.22}$$

La soluzione dell'equazione omogenea è $z_0(t) = ce^{x^2}$. Con la variazione della costante determiniamo la soluzione generale $z(t) = e^{-x^2} + ce^{x^2}$ della (2.22) e quindi $y(t) = z(t)^{-1/2}$.

OSSERVAZIONE 2.6 Finora abbiamo usato il metodo della variazione della costante esclusivamente per equazioni lineari. È possibile però utilizzarlo anche per risolvere l'equazione di Bernoulli. Questo fatto non deve sorprendere viste le "parentele" dell'equazione di Bernoulli con le equazioni lineari.

Provare, per esercizio, a risolvere prima l'equazione $y' + a(t)y = 0$ per poi determinare la soluzione generale della (2.20) facendo variare la costante.

Indice

2 Equazioni differenziali ordinarie **29**
2.1 Generalità e definizioni 29
2.2 Equazioni a variabili separabili 31
2.3 Equazioni omogenee 33
2.4 Equazioni lineari 34
2.4.1 Equazioni lineari del primo ordine 36
2.4.2 Equazioni omogenee a coefficienti costanti 38
2.4.3 Equazioni non omogenee a coefficienti costanti 41
2.5 Equazione di Bernoulli 45