Esercizi 2: Curve dello spazio

0.1 Esercizio

Si consideri la curva (elica circolare):

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

dove $a > 0$.

a) Calcolare curvatura e torsione di α nel generico punto t.

b) Determinare la funzione ascissa curvilinea $s = s(t)$ con origine in $t = 0$; determinare quindi la lunghezza dell'arco corrispondente all'intervallo $t \in [0, 2\pi]$.

0.2 Esercizio

a) Verificare che la curva

$$\begin{cases} x = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ y = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \\ z = a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \end{cases}$$

è piana, per ogni scelta di a_i, b_i, c_i.

b) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente la curva

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t^2 \\ z = t + t^2 \end{cases}$$

0.3 Esercizio

Studiare la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

dove $\phi(t)$ è una funzione positiva di t.

a) Calcolare la curvatura $k(t)$ in funzione di $\phi(t)$, e determinare $\lim_{t\to\infty} k(t)$ nel caso in cui $\phi(t) = t^2$.

b) Trovare una funzione $\phi(t)$ per la quale α risulti piana.

c) Scrivere un'equazione differenziale che deve essere soddisfatta da $\phi(t)$ affinche' α sia una curva piana.

0.4 Esercizio

Data una funzione differenziabile $\psi(t)$ definita per $t > 0$, si consideri la curva:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \psi(t)\cos t \\ \psi(t)\sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t > 0.$$

Dimostrare che, se $\psi(t)$ converge a zero, per $t \to \infty$, insieme alle sue derivate $\psi(t), \psi''(t)$, allora si ha

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0.$$

0.5 Esercizio

Si consideri la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ \log t \end{pmatrix} \quad t \geq 1.$$

Determinare:

a) La funzione ascissa curvilinea $s(t)$, con origine in $t = 1$.

b) La curvatura e la torsione di α. Calcolare inoltre

$$\lim_{t\to\infty} k(t), \quad \lim_{t\to\infty} \tau(t).$$

c) È vero che il piano osculatore π_t tende a un piano limite quando $t \to \infty$?

d) È vero che la terna di Frenet $(T(t), N(t), B(t))$ tende a una terna limite quando $t \to \infty$?

0.6 Esercizio

È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ \sqrt{1 - e^{-2t}} \end{pmatrix} \quad t \in [1, +\infty).$$

a) Verificare che α è regolare, e che la sua traccia è contenuta in una sfera.

b) È vero che esiste una costante c tale che $|\alpha'(t)| \leq ce^{-t}$ per ogni $t \geq 1$? È vero che l'arco da 1 a $+\infty$ ha lunghezza totale costante ?

0.7 Esercizio

Si consideri la curva (cubica gobba):

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \ t \geq 0.$$

Dopo aver osservato che α è regolare per ogni $t \in \mathbf{R}$, determinare la funzione ascissa curvilinea $s : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ e calcolare la lunghezza della curva da $t = 0$ a $t = 2$. Determinare inoltre:

b) curvatura e torsione nel punto $\alpha(t)$;

c) il triedro di Frenet nell'origine;

d) l'equazione della retta tangente nel punto $\alpha(2)$;

e) l'equazione del piano osculatore e del piano normale nel punto $\alpha(0)$.

0.8 Esercizio

È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2 - t^2 \\ 1 + t \\ 4 + 2t - t^2 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver osservato che α è regolare per ogni $t \in \mathbf{R}$, determinare l'equazione della retta tangente nel punto $\alpha(0)$.

b) Determinare curvatura e torsione della curva nel punto generico $\alpha(t)$.

c) Determinare il triedro di Frenet per il valore $t = 1$ e l'equazione di ciascuno dei piani: osculatore, normale rettificante.

d) È vero che α è piana ? In tal caso, determinare l'equazione del piano che la contiene.

0.9 Esercizio

È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 - e^{-t} \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

a) Determinare la curvatura $k(t)$ e la torsione $\tau(t)$ di α al variare di $t \in [0, \infty)$.

b) Stabilire se esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{t \to +\infty} k(t), \quad \lim_{t \to +\infty} \tau(t).$$

c) Sia π_t il piano osculatore di α nel punto $\alpha(t)$. È vero che π_t tende a un piano limite quando $t \to \infty$? È vero che la terna di Frenet $(T(t), N(t), B(t))$ converge a una terna specifica ?

0.10 Esercizio

Sia $\alpha : [-L, L] \to \mathbf{R}$ una curva biregolare dello spazio, parametrizzata dall'ascissa curvilinea s.

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor, fino al terzo ordine, della funzione vettoriale $\alpha(s)$ nell'intorno di $s = 0$, esprimendo i coefficienti in funzione del riferimento di Frenet in $s = 0$ (vale a dire, in funzione della terna ortonormale $(T(0), N(0), B(0))$; usare le formule di Frenet).

b) Determinare lo sviluppo di Taylor intorno a $s = 0$, fino al terzo ordine, di ciascuna delle seguenti funzioni scalari:

$$\psi_1(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), T(0) \rangle, \ \psi_2(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), N(0) \rangle, \ \psi_3(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(0) \rangle.$$

0.11 Esercizio

Dato $\lambda > 0$, l'applicazione lineare $F_\lambda : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$F_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

di matrice canonica $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è detta *omotetia* di fattore λ. Data una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$, si consideri la curva

$$\beta(t) = F_\lambda(\alpha(t))$$

ottenuta componendo α con l'omotetia F_λ.

a) Determinare $\beta(t)$ se α è l'elica:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

b) Se α è una curva qualunque, calcolare $k_\beta(t)$ e $\tau_\beta(t)$ in funzione di $k_\alpha(t)$ e $\tau_\alpha(t)$.

c) È vero che la proprietà di essere una curva piana è invariante per omotetie ?

0.12 Esercizio

Studiare curvatura e torsione della curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e stabilire i valori massimi e minimi che puo' assumere la sua curvatura.

0.13 Esercizio

Studiare curvatura e torsione della curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

0.14 Esercizio

Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea, sia f un'isometria di $\mathbf{R}^3$ e sia β l'immagine di α tramite f, cioè $\beta = f \circ \alpha$.

a) Dimostrare che $k_\beta(s) = k_\alpha(s)$ per ogni s.

b) Dimostrare che

$$\tau_\beta(s) = \begin{cases} \tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è diretta,} \\ -\tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è inversa.} \end{cases}$$

Si assuma noto il seguente fatto. Se A è una matrice ortogonale di ordine 3 e $u, v \in \mathbf{R}^3$, allora:

$$Au \wedge Av = \begin{cases} A(u \wedge v) & \text{se } \det A = 1, \\ -A(u \wedge v) & \text{se } \det A = -1. \end{cases}$$

0.15 Esercizio

Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare dello spazio parametrizzata dall'ascissa curvilinea: $\alpha = \alpha(s)$, e sia $B(s)$ il versore binormale di α. Fissato un parametro $\lambda > 0$, si consideri la curva $\alpha_\lambda : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$\alpha_\lambda(s) = \alpha(s) + \lambda B(s) \quad \text{per ogni } s \in [0, L].$$

a) Discutere la regolarità di α_λ, e dimostrare che la lunghezza di α_λ sull'intervallo $[0, L]$ risulta maggiore o uguale della lunghezza di α su $[0, L]$ per ogni scelta di λ. Dare inoltre una condizione geometrica necessaria e sufficiente affinche' si abbia l'uguaglianza tra le due lunghezze.

b) Supponiamo ora che α abbia curvatura e torsione costanti, diciamo $k(s) = p$, $\tau(s) = q$ per opportuni numeri reali p, q, e per ogni $s \in [0, L]$. Calcolare la lunghezza di α_λ e stabilire se α_λ ha anch'essa curvatura costante oppure no.

c) Supponiamo che α sia una curva piana. È vero che α_λ si ottiene applicando ad α un'opportuna isometria dello spazio ? Se è cosi', quale ?

d) Calcolare la lunghezza di α_λ se $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$ è cosi' definita:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ s \end{pmatrix}.$$