Esercizi - Novembre 2018

Esercizio 1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } a, b, c \in \mathbf{R}$$

scambiamo immediatamente la seconda e la terza riga di A tra loro. Poi effettuiamo $R_3 - aR_1$ e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c-a \end{pmatrix}$$

Se poi effettuiamo $R_3 - bR_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a-b \end{pmatrix}$$

da cui segue molto facilmente che il rango della matrice é 3 se e solo se $c \neq a + b$; questa condizione é anche necessaria e sufficiente per l'invertibilitá di A.

Esercizio 2. Sia

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuiamo $R_2 - R_1$ e poi in seguito $R_3 - R_2$; otteniamo:

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque A é invertibile. A questo punto dividiamo per 2 la terza riga e in seguito aggiungiamo R_3 a R_2 e la sottraiamo a R_1. Otteniamo:

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

per cui, se non ho sbagliato i calcoli, abbiamo che l'inversa di A é

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Per la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vediamo subito che $R_3 = 2R_1 - R_2$ per cui la matrice B non é invertibile (se uno non lo vede subito lo vede dopo aver fatto Gauss-Jordan). Ne segue che anche AB non é invertibile, dato che siccome A é invertibile, la matrice B é invertibile se e solo se la matrice AB é invertibile.

Esercizio 3.

(i) $W_1 = \{A \in M_2 | a_{11} \in \mathbf{Q}\}$ non é un sottospazio perché se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \in W_1$ ma $\sqrt{2}A \notin W_1$

(ii) $W_2 = \{A \in M_2 | a_{11} + a_{12} + a_{21} = a_{22}\}$ é un sottospazio perché chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalare (le equazioni sono lineari omogenee)

(iii) $W_3 = \{A \in M_2 | a_{11} + a_{12} + a_{21} = 4\}$ non é un sottospazio perché se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \in W_3$ ma $\sqrt{2}A \notin W_3$

(iv) $W_4 = \{A \in M_2 || a_{12}| = |a_{21}|\}$ non é un sottospazio perché se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, allora $A \in W_4$ e $B \in W_4$, ma $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \notin W_4$

(v) $W_5 = \{A \in M_2 | a_{11} > 0\}$ non é un sottospazio perché se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \in W_5$ ma $-A \notin W_5$

(vi) $W_6 = \{A \in M_2 | a_{11} = 1\}$ non é un sottospazio perché se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \in W_6$ ma $\sqrt{2}A \notin W_6$

(vii) $W_7 = \{A \in M_2 | a_{11} = a_{21}\}$ é un sottospazio perché chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalare (le equazioni sono lineari omogenee)

(viii) Se $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $W_8 = \{A \in M_2 | AB = BA\}$ é un sottospazio. Infatti se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ abbiamo $AB = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ da cui segue che $A \in W_8$ se e solo se $b = c$, $a = d$. Queste sono equazioni lineari omogenee e dunque come sempre W_8 rappresenta l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo ed é un sottospazio.

Esercizio 4. Si stabilisca, motivando la risposta, quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^4$ é un sottospazio.

(i) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 \in \mathbf{Q}\}$ non é un sottospazio perché se $A = (1, 2, 1, 3)$, $A \in W_1$ ma $\sqrt{2}A \notin W_1$

(ii) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 + a_2 + a_3 = a_4\}$ é un sottospazio perché chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalare (le equazioni sono lineari omogenee)

(iii) $W_3 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 + a_2 + a_3 = 4\}$ non é un sottospazio perché se $A = (1, 2, 1, 3)$, $A \in W_3$ ma $\sqrt{2}A \notin W_3$

(iv) $W_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 || a_2| = |a_3|\}$ non é un sottospazio perché se $A = (1, -1, 1, 3)$ e $B = (1, 1, 1, 3)$, allora $A \in W_4$ e $B \in W_4$, ma $A + B = (2, 0, 2, 6) \notin W_4$

(v) $W_5 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 > 0\}$ non é un sottospazio perché se $A = (1, 2, 1, 3)$, $A \in W_5$ ma $-A \notin W_5$

(vi) $W_6 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 = 1\}$ non é un sottospazio perché se $A = (1, 2, 1, 3)$, $A \in W_6$ ma $\sqrt{2}A \notin W_1$

(vii) $W_7 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 = a_3\}$ é un sottospazio perché chiuso rispetto a somma e moltiplicazione per scalare (le equazioni sono lineari omogenee)

Esercizio 5. Se $R_1(A) = 2R_2(A) - R_n(A)$ allora effettuiamo la modificazione delle righe $R_1(A) - 2R_2(A) + R_n(A)$ e otteniamo una matrice A' che é modificazione delle righe di A ma non é invertibile. Poiché abbiamo $A' = EA$ con E invertibile e poiché A é invertibile se e solo se é invertibile $EA = A'$, la matrice A non é invertibile