Esercizi - Ottobre 2018

Esercizio 1.

i)Consideriamo la matrice completa del sistema da studiare:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix}, \text{ con } h \in \mathbf{R}$$

con le modifiche elementari $R_2 - 2R_1$ e $R_3 - R_1$ ottengo

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \end{pmatrix}$$

Adesso, se $h = 0$ la matrice C' é ridotta per righe e ha la seconda riga nulla. Poiché la sottomatrice che riduce A ha due righe non nulle il sistema é compatibile e ha infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro reale.

Se invece $h \neq 0$ effettuiamo la modificazione $hR_3 - (h+1)R_2$ e otteniamo la matrice:

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & h^2 - h \end{pmatrix}$$

da cui deriva che il sistema é compatibile se e soltanto se $h \neq 1$ e che in tal caso il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro reale.

ii) Sia ora $h = 0$. Effettuando l' operazione $R_2 - 2R_1$ ottengo

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}$$

da cui abbiamo compatibilitá se e solo se $k = 0$, dalla seconda equazione.

Esercizio 2.

i) Il rango della matrice é il numero di righe non nulle di una matrice ridotta per righe e che ne sia modificazione delle righe. Modifichiamo

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & h & 0 & 1 \\ 1 & h-1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante $R_2 - R_1, R_3 - 2R_1, R_4 - R_1$ e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & h-2 & 2 & -1 \\ 0 & h-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se operiamo con $R_3 - R_2$ e successivamente con $R_4 - R_3$ otteniamo:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & h-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $h = 2$ la matrice é ridotta con due righe non nulle; se $h \neq 2$ la matrice é ridotta con tre righe non nulle.

ii) Il sistema ha 4 indeterminate. Dunque, se $h = 2$ esso ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri reali, mentre se $h \neq 2$ le infinite soluzioni dipendono da un solo parametro reale.

iii) Se $h = 2$ le soluzioni sono

$$(x, y, z, w) = (-t_1 - t_2, t_1, t_2, 2t_2)$$

Esercizio 3. i) Modifichiamo

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & h+7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & h+2 & 1 \end{pmatrix}$$

prima scambiando R_1 con R_2 (perché R_2 non ha parametri) e operando $R_2 - 3R_1, R_3 - R_1$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & h+1 \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix}$$

Se $h = -1$ la matrice é ridotta per righe e dunque A ha rango 2. Se invece $h \neq -1$ effettuiamo $(h+1)R_3 + R_2$ e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & h+1 \\ 0 & h(h+1) & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che A ha rango 2 anche per $h = 0$, mentre per $h(h+1) \neq 0$ il rango é 3.

ii) Il sistema ha tre indeterminate; ne segue che ha un'unica soluzione per $h(h+1) \neq 0$ e infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro reale altrimenti.

iii) Se $h = -1$ le soluzioni del sistema omogeneo sono $(x, y, z) = (0, -t, t)$. Per il sistema non omogeneo partiamo da

$$C := \begin{pmatrix} 3 & 6 & h+7 & k \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & h+2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed effettuiamo i primi passaggi in i): scambiamo R_1 con R_2 e operiamo $R_2 - 3R_1$. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h+1 & k \\ 0 & h & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $h = -1$ la seconda equazione, e dunque il sistema. é compatibile se e soltanto se $k = 0$.