

Università degli Studi di Roma Tre  
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2014/2015  
Geometria (6 crediti)  
Prova scritta – 26 Giugno 2015.

Nome e cognome

**Esercizio 1** Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & h & 0 & 1 \\ 1 & h-1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } h \in \mathbf{R}.$$

- (i) Utilizzando esclusivamente l'algoritmo di Gauss-Jordan, si determini il rango di  $A$ , al variare del parametro  $h \in \mathbf{R}$ .
- (ii) Sia  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  la funzione lineare definita ponendo  $f(\mathbf{v}) := A \cdot \mathbf{v}$ , per ogni vettore (colonna)  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$ . Si calcoli, al variare di  $h \in \mathbf{R}$ , la dimensione di  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$ .
- (iii) Per  $h = 2$ , si calcoli una base di  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$ .

**Esercizio 2** In  $\mathbf{R}^4$  si considerino i vettori  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$   $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$   $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 2, 2)$  e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \quad W := \{\mathbf{v} = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x = z - w = 0\}.$$

- (i) Si determini una base di  $V$  e di  $W$ .
- (ii) Si calcoli la dimensione di  $V \cap W$  e di  $V + W$ .

**Esercizio 3** Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definito ponendo  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z \\ 2x + 2y + 2z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}$ .

- (i) Si determini una base  $\mathcal{A}$  di autovettori di  $\mathbf{R}^3$ , rispetto a  $f$ .
- (ii) Si determinino le matrici del cambiamento di base  $M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(\text{Id})$ ,  $M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\text{Id})$ , essendo  $\mathcal{E}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .

**Esercizio 4** Dimostrare che un sottoinsieme  $V \subset \mathbf{R}^n$  è un sottospazio se e solo se è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali.