

Università degli Studi di Roma Tre  
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2016/2017  
Geometria (6 crediti)  
Prova scritta – 31 Gennaio 2018.

Nome e cognome

**Esercizio 1** Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$  data da

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_2 + x_4)$$

- (i) Si calcoli la dimensione e si indichi una base di  $\text{Ker}(f)$  e di  $\text{Im}(f)$ .
- (ii) Si scriva la matrice che rappresenta  $f$  rispetto alla base formata dai vettori  $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ .
- (iii) Si indichi una equazione per  $\text{Im}(f)$ .

**Esercizio 2** In  $\mathbf{R}^4$  si considerino i vettori  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$   $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$   $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0)$  e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \quad W := \{\mathbf{v} = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid w = z - x = 0\}.$$

- (i) Si determini una base di  $V$  e di  $W$ .
- (ii) Si calcoli la dimensione di  $V \cap W$  e di  $V + W$ .

**Esercizio 3** Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definito ponendo  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x - 2y - z \\ -2x + 5y + 2z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix}$ .

- (i) Si determini una base  $\mathcal{A}$  di autovettori di  $\mathbf{R}^3$ , rispetto a  $f$ .
- (ii) Si determinino le matrici del cambiamento di base  $M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(\text{Id})$ ,  $M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\text{Id})$ , essendo  $\mathcal{E}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .