Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Geometria A-L (6 crediti)
Prova scritta – 09 settembre 2016.

Nome e cognome

Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & h+7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & h+2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } h \in \mathbf{R}.$$

(i) Utilizzando esclusivamente l'algoritmo di Gauss-Jordan, si determini il rango di A, al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$.

(ii) Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo $f(\mathbf{v}) := A \cdot \mathbf{v}$, per ogni vettore (colonna) $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Si calcoli, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la dimensione di $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$.

(iii) Per $h = -1$, si calcoli una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e si stabilisca se esiste un valore di $k \in \mathbf{R}$ tale che $(k, 0, 0) \in \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$ $\quad \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 1, 2)$ $\quad \mathbf{v}_3 = (1, 8, 11, 16)$ e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \qquad W := L(\mathbf{v}_3).$$

(i) Si determini una base di V e di W.

(ii) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

Esercizio 3 Si considerino gli endomorfismi f e g di $\mathbf{R}^3$ definiti da

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + z \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x + 2z \\ y \\ 3x + 6z \end{pmatrix}$$

.

(i) Si determini se gli endomorfismi sono diagonalizzabili.

(ii) Si determini una base di autovettori di $\mathbf{R}^3$ per gli endomorfismi diagonalizzabili.

Esercizio 4 Data un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, una base $\mathcal{V}$ per V e una base $\mathcal{W}$ per W, si determini la matrice A che risulta associata a $(f, \mathcal{V}, \mathcal{W})$ e si dimostri che il rango di A coincide con la dimensione dell'immagine di f.