Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2017/2018
Geometria (6 crediti)
Prova scritta – 06 settembre 2018.

Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix} \qquad \text{con } h \in \mathbf{R}.$$

(i) Utilizzando esclusivamente l'algoritmo di Gauss-Jordan, si determini il rango di A, al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$.

(ii) Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo $f(\mathbf{v}) := A \cdot \mathbf{v}$, per ogni vettore (colonna) $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Si calcoli, al variare di $h \in \mathbf{R}$, la dimensione di $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$.

(iii) Per $h = 2$, si calcoli una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e si stabilisca se esistono valori di $k \in \mathbf{R}$ tali che $(1, k^2 - k, k) \in \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2 In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0)$ $\quad \mathbf{v}_2 = (-1,1,0,0)$ $\quad \mathbf{v}_3 = (1,0,1,1)$ $\quad \mathbf{v}_4 = (0,1,2,2)$ e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \qquad W := L(\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_4).$$

(i) Si determini una base di V e di W.

(ii) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

Esercizio 3 Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definito ponendo $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x + 2y - 4z \\ 2x - 2y - 2z \\ -4x - 2y + z \end{pmatrix}$.

(i) Si determini una base $\mathcal{A}$ di autovettori di $\mathbf{R}^3$, rispetto a f.

(ii) Si determinino le matrici del cambiamento di base $M_{\mathcal{E}\mathcal{A}}(\mathrm{Id}), M_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$, essendo $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$.