Esercizi - Maggio 2019

Esercizio 1. In $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard e rispetto alla base canonica ortonormale si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 1)$.

(i) calcolare l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e ciascun vettore della base canonica;
(ii) calcolare l'angolo tra $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$;
(iii) calcolare la proiezione ortogonale di ciascuno dei tre vettori sul vettore $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$;
(iv) calcolare la lunghezza di ciascuno dei tre vettori;
(v) calcolare una base ortogonale dello spazio dei vettori ortogonali a $\mathbf{v}_1$ e individuare quelli di norma 1;
(vi) costruire con il procedimento di Gram-Schmidt una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ a partire da $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Esercizio 2. Calcolare la segnatura delle forme quadratiche associate alle seguenti matrici e per ciascuna di esse si individui una base di Sylvester:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

quest' ultima al variare di $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3.
In $\mathbf{R}^3$ determinare:

(i) un'equazione cartesiana del piano di giacitura Ł$((1, -1, 3), (2, 2, 5))$ e passante per P di coordinate $(-1, -2, 7)$;
(ii) equazioni parametriche della retta di equazioni cartesiane $2X - Y + 3 = 6Y - Z + 11 = 0$;
(iii) equazioni cartesiane della retta passante per P di coordinate $(1, 1, 3)$ e avente vettore di direzione $(-5, 0, 4)$;
(iv) un'equazione cartesiana ed equazioni parametriche del piano parallelo al piano 2Z-1=0 e passante per P di coordinate $(6, 7, 8)$;
(v) equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela alla retta in ii) e passante per $P(1, 2, 3)$;
(vi) equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $P(-2, -3, 5)$ e perpendicolare al piano$X + Y - Z = 8$;
(vii) un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 5, -1)$ e perpendicolare alla retta dell'esempio ii);
(viii) un'equazione cartesiana del piano individuato dai punti di coordinate $(0, 0, 0), (1, 0, 1), (2, -1, 1)$;
(ix) un'equazione cartesiana del piano contenente la retta $3X - 2Y + Z - 1 = X - 2Y + 3Z + 1 = 0$ passante per $(2, -1, 3)$
(x) un'equazione cartesiana del piano contenente la retta $3X - 2Y + Z - 1 = X - 2Y + 3Z + 1 = 0$ e parallelo alla retta di equazione $X = 1 + t, Y = 2 + 2t, X = 3 + 3t$;
(xi) un'equazione della retta passante per $P = (1, 2, 0)$, perpendicolare alla retta $X - Y + 1 = Y + 2Z - 2 = 0$ e incidente la retta $X - Y = Z - 1$;

(xii) la posizione reciproca delle rette $(X-1)/2 = Y+1 = Z/3$ e $X = t, Y = k-2+2t, X = -3+3t$ in funzione di $k \in \mathbf{R}$;

(xiii) il valore di $a \in \mathbf{R}$ per cui le rette $2X + Y + 2Z - 1 = 0 = aX + Y + Z - 10$ e $(X+3)/2 = (Y+2)/3 = (6-Z)/4$ sono incidenti e trovare il piano che le contiene e il punto di incidenza.

Esercizio 4. Classificare e ridurre a forma canonica le seguenti coniche:

(i) $8X - 6XY - 4Y + 1 = 0$

(ii) $3X^2 + 2xy + 3y^2 + 2X - 2Y = 0$

(iii) $X^2 - 2XY + Y^2 - 2X - 4Y + 6 = 0$

(iv) $2X^2 - 3XY - 2Y^2 + 2X + Y = 0$

(v) $X^2 + 2XY + Y^2 - 3X - 3Y + 2 = 0$

(vi) $4X^2 + 8XY + 4Y^2 = 0$