Esercizi - Novembre 2018

Esercizio 1. Sia A la seguente matrice $3X3$ a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } a, b, c \in \mathbf{R}$$

(i) Utilizzando esclusivamente l'algoritmo di Gauss-Jordan, indicando i passaggi essenziali del procedimento, si diano condizioni necessarie e sufficienti per l'invertibilitá di A.
(ii) Si determini il rango di A al variare di $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Esercizio 2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, si determini se A e B sono invertibili e, se esiste, se ne determini l'inversa.
(ii) Il prodotto righe per colonne AB é invertibile?

Esercizio 3. Si stabilisca, motivando la risposta, quale dei seguenti sottoinsiemi dello spazio M_2 delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali é un sottospazio.

(i) $W_1 = \{A \in M_2 | a_{11} \in \mathbf{Q}\}$
(ii) $W_2 = \{A \in M_2 | a_{11} + a_{12} + a_{21} = a_{22}\}$
(iii) $W_3 = \{A \in M_2 | a_{11} + a_{12} + a_{21} = 4\}$
(iv) $W_4 = \{A \in M_2 || a_{12}| = |a_{21}|\}$
(v) $W_5 = \{A \in M_2 | a_{11} > 0\}$
(vi) $W_6 = \{A \in M_2 | a_{11} = 1\}$
(vii) $W_7 = \{A \in M_2 | a_{11} = a_{21}\}$
(viii) Se $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $W_8 = \{A \in M_2 | AB = BA\}$

Esercizio 4. Si stabilisca, motivando la risposta, quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^4$ é un sottospazio.

(i) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 \in \mathbf{Q}\}$
(ii) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 + a_2 + a_3 = a_4\}$
(iii) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 + a_2 + a_3 = 4\}$
(iv) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 || a_2| = |a_3|\}$
(v) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 > 0\}$
(vi) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 = 1\}$
(vii) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4 | a_1 = a_3\}$

Esercizio 5. Si dimostri che se A é una matrice quadrata di ordine n tale che $R_1(A) = 2R_2(A) - R_n(A)$ allora A non ha rango massimo.