# LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA I

## Equazioni Differenziali Ordinarie

Sergio Lancelotti

Anno Accademico 2006-2007

# Equazioni differenziali ordinarie


1 Equazioni differenziali ordinarie di ordine $n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
2 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale . . . . 10
3 Equazioni differenziali a variabili separabili . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
4 Equazioni differenziali lineari del primo ordine . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
5 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti . . . . . . . . . . 19
5.1 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee 20
5.2 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

## 1 Equazioni differenziali ordinarie di ordine $n$

**(1.1) Definizione** Siano $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ aperto, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. *Un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n$* è un'equazione della forma

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

dove $x \in I$ e $y : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile $n$ volte su $I$. Diciamo che l'equazione differenziale è in forma *normale* se è della forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

dove $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione e $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è un aperto.

Diciamo che $u : I \to \mathbb{R}$ è una *soluzione* (o un *integrale)* dell'equazione differenziale ordinaria $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ se $u$ è derivabile $n$ volte su $I$ e per ogni $x \in I$ si ha che $\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) \in \Omega$ e

$$F\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) = 0,$$

ovvero se è scritta in forma normale come $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$, se $u$ è derivabile $n$ volte su $I$ e per ogni $x \in I$ si ha che $\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right) \in A$ e

$$u^{(n)}(x) = f\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right).$$

In genere nell'equazione differenziale si omette di scrivere la dipendenza della funzione incognita $y$ dalla variabile $x$. Questa dipendenza è ovviamente sottintesa. In molte applicazioni la funzione incognita viene denotata con $x$ e la variabile indipendente con $t$.

**(1.2) Esempio** L'esempio più semplice di equazione differenziale è

$$y' = f(x),$$

dove $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. L'equazione differenziale è del primo ordine. In questo caso le soluzioni sono tutte le primitive di $f$ su $I$. Quindi detta $F$ una primitiva di $f$ su $I$, si ha che le soluzioni dell'equazione $y' = f(x)$ sono

$$y(x) = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

**(1.3) Esempio** Un altro esempio di equazione differenziale del primo ordine è

$$y' = y.$$

Le soluzioni di questa equazione sono le funzioni

$$y(x) = ce^x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Infatti, la funzione $y(x) = ce^x$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con $y'(x) = ce^x = y(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Come vedremo, queste sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione.

**(1.4) Esempio** Un esempio di equazione differenziale del secondo ordine è

$$y'' = y.$$

Le soluzioni di questa equazione sono le funzioni

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Infatti, la funzione $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ è derivabile due volte su $\mathbb{R}$ con

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}, \qquad y''(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} = y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Come vedremo, queste sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione.

Come mostrano questi esempi, se un'equazione differenziale ammette soluzione, allora questa soluzione non è unica, bensì le soluzioni sono infinite e dipendono da un certo numero di costanti arbitrarie.

**(1.5) Definizione** Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$. Si chiama *problema di Cauchy* (detto anche *problema ai valori iniziali*) il problema

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Si chiamano *condizioni iniziali* le uguaglianze $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Osserviamo che il problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale di ordine $n$ ha $n$ condizioni iniziali e, più precisamente, queste condizioni sono i valori della funzione incognita e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$ calcolate tutte nel medesimo punto.

**(1.6) Definizione** Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$. Diciamo che $y : I \to \mathbb{R}$ è una *soluzione* del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

se $y$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, $x_0 \in I$ e $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

**(1.7) Esempio** Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = 1 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

non ha soluzione. Infatti, per $x = 0$ l'equazione diventa $0 = 1$ che è falsa.

**(1.8) Esempio** Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ammette un'unica soluzione. Infatti, per l'Esempio (1.3), le soluzioni sono della forma

$$y(x) = ce^x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Posto $x = x_0$ si ha

$$y(x_0) = ce^{x_0} = y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = y_0\, e^{-x_0}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = y_0\, e^{x - x_0}.$$

**(1.9) Esempio** Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Infatti, la funzione $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione. Inoltre, se per ogni $t \geq 0$ consideriamo le funzioni $y_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$y_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - t)^2 & \text{se } x \geq t \\ 0 & \text{se } x < t, \end{cases}$$

allora $y_t$ è una soluzione del problema di Cauchy. Infatti, $y_t$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con

$$y_t'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-t) & \text{se } x \geq t \\ 0 & \text{se } x < t \end{cases}$$

e

$$\sqrt{y_t(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-t) & \text{se } x \geq t \\ 0 & \text{se } x < t. \end{cases}$$

Quindi $y_t'(x) = \sqrt{y_t(x)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre è verificata anche la condizione iniziale. Infatti, $y_t(0) = 0$. Tutte queste soluzioni coincidono su $(-\infty, 0]$ ma sono diverse su $(0, +\infty)$.

**(1.10) Definizione** Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è *connesso per archi* se per ogni $x_0, x_1 \in A$ esiste una curva parametrica $\gamma : [a, b] \to A$ tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x_1$.

**(1.11) Definizione** Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si chiama *integrale generale* dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

ogni funzione $y = y(x, c_1, \ldots, c_n)$, dove $c_1, \ldots, c_n$ sono $n$ parametri variabili in $n$ intervalli, soddisfacente le seguenti proprietà:

1) per ogni $c_1, \ldots, c_n$ esiste un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che la funzione $y : I \to \mathbb{R}$ definita da $y = y(x, c_1, \ldots, c_n)$ è soluzione dell'equazione differenziale;

2) per ogni $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$ esiste una e una sola funzione $y = y(x, c_1, \ldots, c_n)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Si chiama *integrale particolare* dell'equazione differenziale

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

ogni funzione ottenuta dall'integrale generale attribuendo particolari valori alle costanti $c_1, \ldots, c_n$.

L'integrale generale di una equazione differenziale è un sottoinsieme dell'insieme delle soluzioni. Come vedremo, per le equazioni lineari (vedi paragrafi 4 e 5) questi insiemi coincidono.

**(1.12) Definizione** Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$. Diciamo che una soluzione $u : I \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

è un *prolungamento* della soluzione $v : J \to \mathbb{R}$ del medesimo problema di Cauchy se $J \subseteq I$ e $u_{|J} = v$. Diciamo che $u : I \to \mathbb{R}$ è una *soluzione massimale* del problema di Cauchy se non è prolungabile, cioè se $v : J \to \mathbb{R}$ è una soluzione del medesimo problema di Cauchy tale che $I \subseteq J$ e $v_{|I} = u$, allora $J = I$.

**(1.13) Definizione** Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$, $u : \mathrm{dom}\,(u) \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathrm{dom}\,(u)$ intervallo con $x_0 \in I$ tali che $u_{|I}$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Diciamo che $I$ è un *intervallo massimale per $u$* se non esiste un intervallo $J \subseteq \mathrm{dom}\,(u)$ tale che $u_{|J}$ è soluzione del problema di Cauchy con $I \subseteq J$ e $J \neq I$.

**(1.14) Osservazione** Evidentemente se $u : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione massimale, allora l'intervallo $I$ è massimale per $u$. Il viceversa in generale non è vero. Si consideri, per esempio, la funzione $u : [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $u(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$. Questa funzione è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Infatti, $u'(x) = \frac{1}{2}(x+2) = \sqrt{u(x)}$ per ogni $x \geq -2$ e $u(0) = 1$. L'intervallo massimale è $I = [-2, +\infty)$ ma la soluzione non è massimale. Infatti la funzione $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \geq -2 \\ 0 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

è soluzione del medesimo problema di Cauchy ed è un prolungamento di $u$.

## 2 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale

Sono equazioni differenziali della forma

$$y' = f(x, y),$$

dove $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione e $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

## 3 Equazioni differenziali a variabili separabili

**(3.1) Definizione** Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale *a variabili separabili* è un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$y' = f(x)g(y).$$

Ricerca dell'integrale generale

Si cercano in primo luogo gli zeri della funzione $g$. Se $u_0 \in \mathbb{R}$ è tale che $g(u_0) = 0$, allora la funzione $u : I \to \mathbb{R}$ definita da $u(x) = u_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x)g(y)$ (è anche detta *soluzione costante*).

Sia ora $J'$ un intervallo contenuto in $J$ tale che $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in J'$. Allora dividendo ad ambo i membri per $g(y)$ si ha che per ogni $y \in J'$

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x).$$

Poichè $g$ è continua su $J'$, anche $\frac{1}{g}$ è continua su $J'$. Quindi ammette primitiva su $J'$. Sia $G$ una primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J'$. Allora $G$ è derivabile su $J'$ con

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)}, \quad \forall y \in J'.$$

Sia $I'$ un intervallo contenuto in $I$ tale che per ogni $x \in I'$ si abbia che $y = y(x) \in J'$. Poichè $y$ è derivabile su $I'$, allora $G \circ y : I' \to \mathbb{R}$ è derivabile su $I'$, in quanto composizione di funzioni derivabili, con

$$(G \circ y)'(x) = G'(y(x))y'(x) = \frac{1}{g(y)} y' = f(x),$$

cioè $G \circ y$ è una primitiva di $f$ su $I'$. Detta $F$ una primitiva di $f$ su $I'$ si ha quindi che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad \forall x \in I'.$$

Essendo $J'$ un intervallo e $G' = \frac{1}{g}$ continua su $J'$, allora $G'$ non cambia segno su $J'$. Infatti, se cambiasse segno, per il Teorema degli zeri, si annullerebbe in qualche punto di $J'$. Ne segue che $G'$ è sempre positiva o è sempre negativa su $J'$. In ogni caso $G$ è strettamente monotona su $J'$, quindi invertibile su $J'$. Ne segue che

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c), \quad \forall x \in I'.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione $y' = f(x)g(y)$ è dato da tutte le soluzioni costanti che annullano $g$ su $J$ e da tutte le funzioni della forma

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c),$$

dove $G$ è una primitiva di $\frac{1}{g}$ su un sottointervallo $J'$ di $J$, $F$ è una primitiva di $f$ su un sottointervallo $I'$ di $I$ tale che per ogni $x \in I'$ si ha $y(x) \in J'$ e $c \in \mathbb{R}$.

**(3.2) Osservazione** Operativamente si procede così . Si pone $g(y) = 0$ e si trovano le soluzioni costanti. Poi, per $g(y) \neq 0$, si ha che tutte le altre soluzioni dell'equazione differenziale sono date implicitamente da

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.}$$

Detta quindi $G$ una primitiva di $\frac{1}{g}$ su un sottointervallo di $J$ e $F$ una primitiva di $f$ su un sottointervallo di $I$ si ottiene

$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se è nota l'inversa $G^{-1}$ di $G$ sul sottointervallo di $J$ considerato, allora si ricava

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

**(3.3) Osservazione** Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora l'integrale generale dell'equazione a variabili separabili

$$y' = f(x)y$$

è dato da

$$y(x) = c\, e^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

dove $F$ è una qualunque primitiva di $f$ su $I$.

*Dimostrazione.* Si ha che $y = 0$ è soluzione. Se $y \neq 0$, allora le altre soluzioni sono date da

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Sia $F$ una primitiva di $f$ su $I$. Allora si ha

$$\log |y| = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$|y| = e^{F(x)+c} = e^c e^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

posto $k = e^c$ si ottiene

$$|y| = ke^{F(x)}, \quad k > 0,$$

$$y = \pm ke^{F(x)}, \quad k > 0,$$

posto $c = \pm k$ si ottiene

$$y(x) = ce^{F(x)}, \quad c \neq 0.$$

Poichè per $c = 0$ si ottiene $y(x) = 0$ che è soluzione, allora tutte le soluzioni dell'equazione $y' = f(x)y$ sono date da

$$y(x) = ce^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

■

**(3.4) Teorema (di esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy)** *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ due funzioni, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Supponiamo che $f$ sia continua in $I$ e $g$ sia derivabile con derivata continua in $J$.*

*Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

*ammette una e una sola soluzione massimale definita su un intervallo $I'$ contenente $x_0$ e contenuto in $I$.*

**(3.5) Esempio** Determinare le soluzioni delle equazioni differenziali

1) $y' = xy^2$;

2) $y^2y' = x$.

Svolgimento

1) L'equazione differenziale $y' = xy^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Usando le notazioni precedenti si ha che $f(x) = x$ per ogni $x \in I = \mathbb{R}$ e $g(y) = y^2$ per ogni $y \in J = \mathbb{R}$.

   Determiniamo le soluzioni. L'unica soluzione costante è $y = 0$. Per $y \neq 0$ le altre soluzioni sono date da

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int x\,dx \\ -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ y(x) &= -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}, \qquad c \in \mathbb{R} \\ y(x) &= -\frac{2}{x^2 + c}, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Quindi le soluzioni sono $y(x) = 0$ e $y(x) = -\frac{2}{x^2+c}$, con $c \in \mathbb{R}$.

2) L'equazione differenziale $y^2y' = x$ è del primo ordine a variabili separabili in forma non normale. Per $y \neq 0$ l'equazione si scrive in forma normale come

$$y' = \frac{x}{y^2}.$$

   Osserviamo che $y = 0$ non risolve l'equazione se non in $x = 0$. Usando le notazioni precedenti si ha che $f(x) = x$ per ogni $x \in I = \mathbb{R}$ e $g(y) = \frac{1}{y^2}$ per ogni $y \neq 0$. Quindi l'intervallo $J$ è $(-\infty, 0)$ oppure $(0, +\infty)$.

   Determiniamo le soluzioni. Non esistono soluzioni costanti. Le soluzioni sono date da

$$\begin{aligned} \int y^2\,dy &= \int x\,dx \\ \frac{1}{3}y^3 &= \frac{1}{2}x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Quindi le soluzioni sono $y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}$, con $c \in \mathbb{R}$.

**(3.6) Esempio** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e l'intervallo massimale su cui è definita.

Svolgimento

L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili. Usando le notazioni precedenti si ha che $f(x) = -x$ per ogni $x \in I = \mathbb{R}$ e $g(y) = \frac{1}{y}$ per ogni $y \neq 0$. Poichè $y_0 = -1$, allora si ha che $g : J \to \mathbb{R}$ con $J = (-\infty, 0)$. Osserviamo che $f$ è continua su $I$ e $g$ è derivabile con derivata continua su $J$. Allora per il Teorema (3.4) il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione massimale $y$ definita su un intervallo $I'$ tale che $0 \in I'$ e per ogni $x \in I'$ si ha che $y(x) \in J$, cioè $y(x) < 0$.

Determiniamo la soluzione. L'equazione non ha soluzioni costanti. Le soluzioni sono date da

$$\begin{aligned}
\int y\,dy &= -\int x\,dx \\
\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
y^2 &= -x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\text{essendo } y < 0 \text{ si ha} \\
y(x) &= -\sqrt{-x^2 + c}, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Quindi la soluzione è della forma $y(x) = -\sqrt{-x^2 + c}$, con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -1$ si ottiene $c = 1$. Quindi la soluzione è

$$y(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

L'intervallo massimale $I'$ su cui è definita è l'intervallo massimale tale che

$$\begin{cases}
I' \subseteq \operatorname{dom}\left(-\sqrt{1 - x^2}\right) \\
0 \in I' \\
x \in I' \implies y(x) < 0.
\end{cases}$$

Essendo $\operatorname{dom}\left(-\sqrt{1 - x^2}\right) = [-1, 1]$ e $y(x) < 0$ se $x \in (-1, 1)$, si ha che $I' = (-1, 1)$.

**(3.7) Osservazione** L'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \sqrt{y}$ è dato dalla funzione $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dalle funzioni $y(x) = \frac{1}{4}(x + c)^2$, per ogni $x \in [-c, +\infty)$, con $c \in \mathbb{R}$. La funzione

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è soluzione della stessa equazione differenziale ma non è ottenibile dall'integrale generale per alcun valore di $c$.

# 4 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

**(4.1) Definizione** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale *lineare* del primo ordine in forma normale è un'equazione del tipo

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Se $b = 0$ l'equazione è detta *omogenea*, altrimenti *non omogenea*. Si osserva che se $b = 0$ l'equazione è, in particolare, a variabili separabili. Il termine $b$ è detto *termine forzante*.

**(4.2) Teorema** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue.*

*Allora l'integrale generale dell'equazione lineare del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$ è dato da*

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)} \left( \int e^{-A(x)} b(x)\, dx \right),}$$

*dove $A$ è una qualunque primitiva di $a$ su $I$.*

*Dimostrazione.* Sia $c$ una primitiva di $e^{-A}b$ su $I$. Proviamo inizialmente che la funzione $y(x) = e^{A(x)}c(x)$ è una soluzione dell'equazione lineare $y' = a(x)y + b(x)$. Si ha che $y$ è derivabile in quanto prodotto di funzioni derivabili con

$$y'(x) = A'(x)e^{A(x)}c(x) + e^{A(x)}c'(x) =$$

essendo $A'(x) = a(x)$ e $c'(x) = e^{-A(x)}b(x)$ per ogni $x \in I$

$$= a(x)y(x) + e^{A(x)}e^{-A(x)}b(x) = a(x)y(x) + b(x).$$

Quindi $y$ è una soluzione dell'equazione lineare $y' = a(x)y + b(x)$.

Proviamo ora che ogni soluzione dell'equazione lineare è della forma

$$y(x) = e^{A(x)}c(x),$$

dove $c$ è una primitiva di $e^{-A}b$ su $I$. Poniamo $z(x) = e^{A(x)}c(x)$ e siano $y$ una soluzione dell'equazione lineare e $u = y - z$. Per quanto appena provato $z$ è una soluzione dell'equazione lineare $y' = a(x)y + b(x)$. Osserviamo che $u$ è una soluzione dell'equazione omogenea $y' = a(x)y$. Infatti, $u$ è derivabile in quanto differenza di funzioni derivabili, con

$$u' = y' - z' = (a(x)y + b(x)) - (a(x)z + b(x)) = a(x)(y - z) = a(x)u.$$

Ne segue che $u$ è soluzione dell'equazione a variabili separabili

$$u' = a(x)u.$$

Per l'Osservazione (3.3) le soluzioni sono date da

$$u(x) = ke^{A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Essendo $u = y - z$ si ha che

$$y(x) = u(x) + z(x) = ke^{A(x)} + e^{A(x)}c(x) = e^{A(x)}(c(x) + k)$$

ed essendo $c$ una primitiva di $e^{-A}b$ su $I$ anche $c + k$ lo è. Pertanto l'affermazione è dimostrata. ■

**(4.3) Osservazione** Poiché l'integrale indefinito $\int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx$ contiene una costante additiva arbitraria, si ha che l'integrale generale dell'equazione lineare dipende da questa costante arbitraria.

**(4.4) Teorema (di esistenza e unicità globale della soluzione del problema di Cauchy)** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.*

*Allora esiste una e una sola soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

*definita su $I$.*

**(4.5) Osservazione** Su alcuni testi le equazioni differenziali lineari del primo ordine sono scritte nella forma, non normale,

$$y' + a(x)y = b(x),$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue su $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. In tal caso l'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left( \int e^{A(x)} b(x)\, dx \right),$$

dove $A$ è una qualunque primitiva di $a$ su $I$.

**(4.6) Esempio** Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

1) $y' = 2xy + e^{x^2}$;

2) $y' = \frac{1}{x}y + x^2$.

Svolgimento

1) L'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = 2xy + e^{x^2}$ è dato da

$$y(x) = e^{A(x)} \left( \int e^{-A(x)} e^{x^2} \, dx \right),$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x) = 2x$ su $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\int 2x \, dx = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Posto $A(x) = x^2$ si ottiene

$$y(x) = e^{x^2} \left( \int e^{-x^2} e^{x^2} \, dx \right) = e^{x^2} \left( \int dx \right) = e^{x^2}(x + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = e^{x^2}(x + c)$, con $c \in \mathbb{R}$. Per tutte queste soluzioni l'intervallo massimale è $\mathbb{R}$.

2) L'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \frac{1}{x}y + x^2$ è dato da

$$y(x) = e^{A(x)} \left( \int e^{-A(x)} \, x^2 \, dx \right),$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}$. Si ha che

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Posto $A(x) = \log|x|$ si ottiene

$$y(x) = e^{\log|x|} \left( \int e^{-\log|x|} \, x^2 \, dx \right) = |x| \left( \int \frac{x^2}{|x|} \, dx \right) =$$

sia per $x < 0$ che per $x > 0$ si ottiene

$$= x \left( \int x \, dx \right) = x \left( \frac{1}{2}x^2 + c \right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = x\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$, con $c \in \mathbb{R}$. Per tutte queste soluzioni l'intervallo massimale è $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$.

**(4.7) Esempio** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}y + \dfrac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimale su cui è definita.

Svolgimento

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Poichè le funzioni $a(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ e $b(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ sono continue sull'intervallo $I = (-\infty, 0)$ che contiene $x_0 = -1$, allora per il Teorema (4.4) il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita su $I$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)}$ è dato da

$$y(x) = e^{A(x)} \left( \int e^{-A(x)} \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx \right),$$

dove $A(x)$ è una qualunque primitiva di $a(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$. Si ha che

$$\int \left( -\frac{2x}{1+x^2} \right) dx = -\log\left(1+x^2\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Posto $A(x) = -\log(1+x^2)$ si ottiene

$$y(x) = e^{-\log(1+x^2)} \left( \int e^{\log(1+x^2)} \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx \right) = \frac{1}{1+x^2} \left( \int \frac{1}{x}\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}(\log|x| + c), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{1+x^2}(\log|x| + c)$, con $c \in \mathbb{R}$. Poichè la soluzione è definita su $I = (-\infty, 0)$, allora è della forma

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}[\log(-x) + c], \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(-1) = 0$ si ottiene $c = 0$. Quindi la soluzione è

$$y(x) = \frac{\log(-x)}{1+x^2}, \qquad \forall x < 0.$$

# 5 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

**(5.1) Definizione** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $b : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Un'equazione differenziale *lineare del secondo ordine a coefficienti costanti* è un'equazione della forma

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x).$$

Se $b = 0$ l'equazione è detta *omogenea*, altrimenti *non omogenea*. La funzione $b$ è detta *termine forzante*, mentre $a_0$ e $a_1$ sono detti *coefficienti dell'equazione*. Se almeno uno dei due coefficienti è una funzione non costante di $x$, allora l'equazione è detta *lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti*.

**(5.2) Osservazione** Se $a_0 = a_1 = 0$, allora l'equazione diventa $y'' = b(x)$. Le soluzioni di questa equazione si possono determinare integrando due volte rispetto a $x$. Infatti, con una prima integrazione si ottiene

$$y'(x) = \int y''(x)\, dx = \int b(x)\, dx = B_1(x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

dove $B_1$ è una primitiva di $b$ su $I$. Integrando l'uguaglianza $y'(x) = B_1(x) + c_1$ si ottiene

$$y(x) = \int y'(x)\, dx = \int [B_1(x) + c_1]\, dx = B_2(x) + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $B_2$ è una primitiva di $B_1$ su $I$.

**(5.3) Esempio** Un esempio di fenomeno fisico modellato da un'equazione differenziale della forma $y'' = b(x)$ è quello della caduta di un grave sulla Terra in assenza di attrito. In tal caso la variabile indipendente è il tempo $t$ anzichè $x$. Denotato con $g$ il modulo dell'accelerazione di gravità (supposta costante, $g = 9,8\, m/s^2$), l'equazione del moto è

$$y'' = -g.$$

Se all'istante iniziale $t_0 = 0$ il grave si trova ad un'altezza $y_0$ con una velocità istantanea $v_0$, allora il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0. \end{cases}$$

Integrando una prima volta rispetto a $t$ si ottiene

$$y'(t) = -gt + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

e integrando una seconda volta si ottiene

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$, si ottiene l'equazione

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

nota anche come *equazione del moto uniformemente accelerato*.

## 5.1 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee

Siano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Osserviamo che la funzione $y(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è una soluzione di questa equazione. Quindi le equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee ammettono sempre la soluzione nulla.

**(5.4) Teorema** *Siano $a_0, a_1, \lambda \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due soluzioni dell'equazione differenziale*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

*Allora $y_1 + y_2$, $\lambda y_1$ e $\lambda y_2$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale.*

*Dimostrazione.* Poichè $y_1$ e $y_2$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, si ha che $y_1$ e $y_2$ sono derivabili due volte su $\mathbb{R}$ e si ha che

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0, \qquad y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0.$$

Consideriamo $y = y_1 + y_2$. Allora $y$ è derivabile due volte su $\mathbb{R}$, in quanto somma di funzioni derivabili due volte, con

$$y' = y_1' + y_2', \qquad y'' = y_1'' + y_2''.$$

Sostituendo $y$ nel primo membro dell'equazione omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= (y_1'' + y_2'') + a_1 (y_1' + y_2') + a_0 (y_1 + y_2) = \\ &= \underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{=0} + \underbrace{(y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Quindi $y$ è soluzione dell'equazione omogenea $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Consideriamo ora $y = \lambda y_1$. Allora $y$ è derivabile due volte su $\mathbb{R}$, in quanto prodotto di funzioni derivabili due volte, con

$$y' = \lambda y_1', \qquad\qquad y'' = \lambda y_1''.$$

Sostituendo $y$ nel primo membro dell'equazione omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y \; &= (\lambda y_1'') + a_1 (\lambda y_1') + a_0 (\lambda y_1) = \\ &= \lambda \underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Quindi $y$ è soluzione dell'equazione omogenea $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. Analogamente si dimostra che $y = \lambda y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$. ■

Osserviamo che questa proprietà sussiste anche quando $a_0$ e $a_1$ non sono funzioni costanti.

**(5.5) Definizione** Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f, g : I \to \mathbb{C}$ due funzioni. Diciamo che *$f$ e $g$ sono linearmente dipendenti* se esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ non entrambi nulli tali che $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Diciamo che *$f$ e $g$ sono linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti, cioè se

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \quad \forall x \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \mu = 0.$$

### (5.6) Osservazione

1) Se $f$ e $g$ sono due funzioni linearmente dipendenti, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ non entrambi nulli tali che $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Se $\lambda \neq 0$, allora si ha che $f(x) = -\frac{\mu}{\lambda} g(x)$ per ogni $x \in I$. Se $\mu \neq 0$, allora si ha che $g(x) = -\frac{\lambda}{\mu} f(x)$ per ogni $x \in I$. Quindi esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $f(x) = cg(x)$ o $g(x) = cf(x)$, per ogni $x \in I$. In particolare $f$ e $g$ sono l'una "multipla" dell'altra.

2) È evidente che se $\lambda = \mu = 0$ allora $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Se $f$ e $g$ sono linearmente indipendenti, allora si ha anche che

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \quad \forall x \in I \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \mu = 0.$$

**(5.7) Esempio**

1) Siano $P$ e $Q$ due polinomi complessi di grado diverso. Allora $P$ e $Q$ sono linearmente indipendenti.

   Infatti, se per assurdo fossero linearmente dipendenti, allora per l'Osservazione (5.6) esisterebbe $c \in \mathbb{C}$ tale che $P(x) = c\,Q(x)$ o $Q(x) = cP(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $P$ e $Q$ avrebbero lo stesso grado: assurdo.

2) Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$ e $g(x) = e^{\beta x}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \beta$ sono linearmente indipendenti.

   Infatti, se per assurdo fossero linearmente dipendenti, allora per l'Osservazione (5.6) esisterebbe $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = cg(x)$ o $g(x) = cf(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Nel primo caso si avrebbe che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x} = c\,e^{\beta x} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{(\alpha-\beta)x} = c \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta : \text{ assurdo perchè } \alpha \neq \beta.$$

   Analogamente nel secondo caso.

3) Siano $z, z' \in \mathbb{C}$, $z = \alpha + i\beta$ e $z' = \alpha' + i\beta'$, con $\beta \neq \beta'$. Allora le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{zx}$ e $g(x) = e^{z'x}$ sono linearmente indipendenti.

   Infatti, se per assurdo fossero linearmente dipendenti, allora per l'Osservazione (5.6) esisterebbe $c \in \mathbb{C}$ tale che $f(x) = cg(x)$ o $g(x) = cf(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Nel primo caso si avrebbe che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^{zx} = c\,e^{z'x} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{(z-z')x} = c \quad \Longleftrightarrow \quad e^{(\alpha-\alpha')x + i(\beta-\beta')x} = c \quad \Longleftrightarrow$$

$$e^{(\alpha-\alpha')x}\Big\{\cos[(\beta-\beta')x] + i\sin[(\beta-\beta')x]\Big\} = c \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta', \end{cases}$$

   ma ciò è assurdo perchè $\beta \neq \beta'$. Analogamente nel secondo caso.

4) Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\beta x$ e $g(x) = \sin\beta x$ con $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, sono linearmente indipendenti.

   Infatti, se per assurdo fossero linearmente dipendenti, allora esisterebbero $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poichè

$$f(x) = \cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \qquad g(x) = \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

   si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + \mu\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2i}\mu\right) e^{i\beta x} + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2i}\mu\right) e^{-i\beta x} = 0.$$

Poichè per il caso precedente le funzioni $e^{i\beta x}$ e $e^{-i\beta x}$ sono lineramente indipendenti, ciò implica

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2i}\mu = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2i}\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0 : \text{ assurdo.}$$

5) Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n e^{\alpha x}$ e $g(x) = x^m e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, sono linearmente indipendenti.

   Infatti, se per assurdo fossero linearmente dipendenti, allora per l'Osservazione (5.6) esisterebbe $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = cg(x)$ o $g(x) = cf(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Nel primo caso si avrebbe che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$x^n e^{\alpha x} = cx^m e^{\alpha x} \iff x^n = cx^m : \text{ assurdo perchè } n \neq m.$$

   Analogamente nel secondo caso.

6) Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x} \cos\beta x$ e $g(x) = e^{\alpha x} \sin\beta x$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, sono linearmente indipendenti.

   Infatti, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0 \iff \lambda e^{\alpha x} \cos\beta x + \mu e^{\alpha x} \sin\beta x = 0 \iff$$

$$e^{\alpha x}\Big(\lambda \cos\beta x + \mu \sin\beta x\Big) = 0 \iff \lambda \cos\beta x + \mu \sin\beta x = 0.$$

   Poichè per il caso 4) le funzioni $\cos\beta x$ e $\sin\beta x$ sono linearmente indipendenti, ciò implica $\lambda = \mu = 0$.

**(5.8) Teorema** *Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

*con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, si considera* l'equazione caratteristica *associata*

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

*ottenuta sostituendo $\lambda^k$ al posto di $y^{(k)}$ per ogni $k = 0, 1, 2$ (con la convenzione che $y^{(0)} = y$).*

*Allora valgono i seguenti fatti:*

1) *se* $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$, *allora l'equazione caratteristica* $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$ *ammette due soluzioni reali distinte* $\lambda_1, \lambda_2$ *e l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea* $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0$ *è*

$$\boxed{y(x) = c_1\,e^{\lambda_1 x} + c_2\,e^{\lambda_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},}$$

*(in altri termini due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale sono* $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ *e* $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$*);*

2) *se* $\Delta = a_1^2 - 4a_0 = 0$, *allora l'equazione caratteristica* $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$ *ammette la soluzione reale* $\lambda = -\frac{a_1}{2}$ *con molteplicità due, e l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea* $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0$ *è*

$$\boxed{y(x) = c_1\,e^{\lambda x} + c_2 x\,e^{\lambda x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},}$$

*(in altri termini due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale sono* $y_1(x) = e^{\lambda x}$ *e* $y_2(x) = xe^{\lambda x}$*);*

3) *se* $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$, *allora l'equazione caratteristica* $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$ *ammette due soluzioni complesse coniugate* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, *e l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea* $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0$ *è*

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},}$$

*(in altri termini due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale sono* $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ *e* $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$*).*

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione $y(x) = e^{\lambda x}$ e determiniamo per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0.$$

Si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = \lambda\,e^{\lambda x}, \qquad y''(x) = \lambda^2\,e^{\lambda x}.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{\lambda x}\Big(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\Big) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Quindi $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione algebrica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Allora si ha che

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

ossia

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad a_0 = \lambda_1\lambda_2.$$

Denotiamo con $D$ l'operatore di derivazione, cioè tale che $Dy = y'$ per ogni funzione $y$ derivabile, e con $I$ l'applicazione identica, cioè tale che $Iy = y$ per ogni funzione $y$. Allora si ha che

$$y'' + a_1y' + a_0y = (D - \lambda_2 I) \circ (D - \lambda_1 I)y.$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
(D - \lambda_2 I) \circ (D - \lambda_1 I)y &= (D - \lambda_2 I)[(D - \lambda_1 I)y] = \\
&= (D - \lambda_2 I)(Dy - \lambda_1 y) = \\
&= (D - \lambda_2 I)(y' - \lambda_1 y) = \\
&= (D - \lambda_2 I)y' - (D - \lambda_2)(\lambda_1 y) = \\
&= Dy' - \lambda_2 y' - D(\lambda_1 y) + \lambda_1\lambda_2 y = \\
&= y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = \\
&= y'' + a_1y' + a_0y.
\end{aligned}$$

Ne segue che l'equazione omogenea

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

si può scrivere come

$$(D - \lambda_2 I) \circ (D - \lambda_1 I)y = 0.$$

Poniamo

$$u = (D - \lambda_1 I)y. \tag{5.9}$$

Allora $u$ risolve l'equazione

$$(D - \lambda_2 I)u = 0,$$

cioè

$$u' = \lambda_2 u.$$

Per l'Osservazione (3.3) si ha che

$$u(x) = k_2 e^{\lambda_2 x}, \quad k_2 \in \mathbb{C}.$$

Per (5.9) si ha che $y$ risolve l'equazione

$$(D - \lambda_1 I)y = u,$$

cioè

$$y' = \lambda_1 y + k_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Quindi $y$ risolve un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Per il Teorema (4.2) si ha che

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}\left(k_2 \int e^{-\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x}\, dx\right) = k_2 e^{\lambda_1 x}\left(\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\, dx\right).$$

Sussistono due casi:

1) se $\lambda_1 = \lambda_2$, quindi reali, allora si ottiene

$$\begin{aligned} y(x) \;&= k_2 e^{\lambda_1 x}\left(\int dx\right) = \\ &= k_2 e^{\lambda_1 x}(x + k_1) = \\ &= k_1 k_2 e^{\lambda_1 x} + k_2 x e^{\lambda_1 x} = \\ &\text{posto } c_1 = k_1 k_2 \text{ e } c_2 = k_2 \\ &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Quindi, posto $\lambda = \lambda_1$, l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda x} + c_2 x\, e^{\lambda x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

2) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora si ottiene

$$\begin{aligned} y(x) \;&= k_2 e^{\lambda_1 x}\left(\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\, dx\right) = \\ &= k_2 e^{\lambda_1 x}\left(\tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + k_1\right) = \\ &= k_1 k_2 e^{\lambda_1 x} + \tfrac{k_2}{\lambda_2-\lambda_1} e^{\lambda_2 x} = \\ &\text{posto } c_1 = k_1 k_2 \text{ e } c_2 = \tfrac{k_2}{\lambda_2-\lambda_1} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora queste soluzioni sono reali se e solo se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, allora per il Teorema sulle radici complesse di un polinomio reale si ha che $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Posto $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, si ha che $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea diventa

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x} = c_1\, e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2\, e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(c_1\, e^{i\beta x} + c_2\, e^{-i\beta x}\right) =$$

$$= e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] =$$

$$= e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\sin\beta x\right].$$

Queste soluzioni sono reali se e solo se $(c_1 + c_2), i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$. Posto $c_1 = \delta_1 + i\gamma_1$ e $c_2 = \delta_2 + i\gamma_2$, con $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$c_1 + c_2 = (\delta_1 + \delta_2) + i(\gamma_1 + \gamma_2), \qquad i(c_1 - c_2) = (\gamma_2 - \gamma_1) + i(\delta_1 - \delta_2).$$

Quindi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \in \mathbb{R} \\ i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ \delta_1 - \delta_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma_2 = -\gamma_1 \\ \delta_2 = \delta_1 \end{cases} \iff c_2 = \overline{c_1}.$$

Quindi se $c_2 = \overline{c_1}$, allora

$$c_1 + c_2 = 2\delta_1, \quad i(c_1 - c_2) = -2\gamma_1.$$

Posto $C_1 = 2\delta_1$ e $C_2 = -2\gamma_1$ si ha che l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La dimostrazione è completa. ■

Questa proprietà non sussiste, in generale, se $a_0$ e $a_1$ non sono costanti.

**(5.10) Corollario** *Siano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

*Allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

*al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* È un'immediata conseguenza del teorema precedente e dell'Esempio (5.7). ∎

**(5.11) Teorema (di esistenza e unicità globale della soluzione del problema di Cauchy)** *Siano* $a_0, a_1, x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

*Allora esiste una e una sola soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

*definita su* $\mathbb{R}$.

**(5.12) Esempio** Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

2) $y'' - 2y' + y = 0$;

3) $y'' + y' + y = 0$.

Svolgimento

1) Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea $y'' - 2y' + y = 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ la cui soluzione è $\lambda = 1$ con molteplicità $m = 2$. Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea $y''+y'+y=0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+\lambda+1=0$ le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi l'integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) \quad &= e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\left[c_1 \cos\left(\mathrm{Im}\left(\lambda_1\right)x\right) + c_2 \sin\left(\mathrm{Im}\left(\lambda_1\right)x\right)\right] = \\ &= e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right], \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## 5.2 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee

**(5.13) Teorema** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $b : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

*Allora l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$ è dato da $y = y_o + y_p$ , dove $y_o$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ e $y_p$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$ .*

*Dimostrazione.* Proviamo inizialmente che $y = y_o + y_p$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea. Si ha che $y$ è derivabile due volte su $I$ in quanto somma di funzioni derivabili due volte su $I$ con

$$y' = y_o' + y_p', \qquad y'' = y_o'' + y_p''.$$

Sostituendo nel primo membro dell'equazione differenziale non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= (y_o'' + y_p'') + a_1(y_o' + y_p') + a_0(y_o + y_p) = \\ &= \underbrace{(y_o'' + a_1 y_o' + a_0 y_o)}_{=0} + \underbrace{(y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p)}_{=b(x)} = b(x). \end{aligned}$$

Quindi $y$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea.

Proviamo ora che ogni soluzione dell'equazione differenziale non omogenea è della forma $y_o + y_p$. Siano $y_1$ e $y_2$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea associata $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ e sia $z$ una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$. Per il Corollario (5.10) l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea $y_o$ è della forma

$$y_o = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. È quindi sufficiente dimostrare che esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$.

Sia $y = z - y_p$. Si ha che $y$ è derivabile due volte su $I$ in quanto differenza di funzioni derivabili due volte su $I$ con

$$y' = z' - y_p', \qquad y'' = z'' - y_p''.$$

Sostituendo nel primo membro dell'equazione differenziale non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= (z'' - y_p'') + a_1(z' - y_p') + a_0(z - y_p) = \\ &= \underbrace{(z'' + a_1 z' + a_0 z)}_{=b(x)} - \underbrace{(y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p)}_{=b(x)} = 0. \end{aligned}$$

Quindi $y$ è soluzione dell'equazione differenziale omogenea. Allora per il Corollario (5.10) esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Ne segue che

$$z = y + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

La dimostrazione è completa. ■

Questa proprietà sussiste anche quando $a_0$ e $a_1$ non sono funzioni costanti. Osserviamo inoltre che nella seconda parte della dimostrazione del teorema precedente si è provato che la differenza di due soluzioni dell'equazione differenziale non omogenea $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Ricerca di un integrale particolare dell'equazione non omogenea

Consideriamo l'equazione non omogenea $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$. Determiniamo un integrale particolare nei seguenti casi, a seconda della forma del termine noto $b$:

$(i)$ $b(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, con $P$ polinomio e $\alpha \in \mathbb{R}$;

$(ii)$ $b(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, con $P$ e $Q$ polinomi e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che $(i)$ è un caso particolare di $(ii)$.

Caso $(i)$. Sia $b(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, con $P$ polinomio e $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo due sottocasi:

$(a)$ se $\alpha$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$, o equivalentemente se $y(x) = e^{\alpha x}$ non è una soluzione particolare dell'equazione omogenea $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$\boxed{y_p(x) = Q(x)\, e^{\alpha x},}$$

dove $Q$ è un polinomio dello stesso grado di $P$;

$(b)$ se $\alpha$ è una soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$ con molteplicità $m$ $(1 \leq m \leq 2)$, cioè $\alpha$ è una soluzione singola $(m = 1)$ o doppia $(m = 2)$, o equivalentemente se $y(x) = e^{\alpha x}$ oppure $y(x) = e^{\alpha x}$ e $y(x) = xe^{\alpha x}$ sono soluzioni particolari dell'equazione omogenea $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$\boxed{y_p(x) = x^m Q(x)\, e^{\alpha x},}$$

dove $Q$ è un polinomio dello stesso grado di $P$.

Caso $(ii)$. Sia $b(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, con $P$ e $Q$ polinomi e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo due sottocasi:

$(c)$ se $\alpha \pm i\beta$ non sono soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$, o equivalentemente se $y(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $y(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ non sono soluzioni particolari dell'equazione omogenea $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$\boxed{y_p(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\sin\beta x),}$$

dove $P_1$ e $Q_1$ sono due polinomi di grado uguale al massimo dei gradi di $P$ e $Q$;

$(d)$ se $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$, o equivalentemente se $y(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $y(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sono soluzioni particolari dell'equazione omogenea $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = 0$, allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$\boxed{y_p(x) = xe^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\sin\beta x),}$$

dove $P_1$ e $Q_1$ sono due polinomi di grado uguale al massimo dei gradi di $P$ e $Q$.

**(5.14) Osservazione** Individuata la forma dell'integrale particolare $y_p$ dell'equazione non omogenea, lo si determina imponendo che $y_p$ verifichi l'equazione non omogenea $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = b(x)$ per ogni $x \in I$.

**(5.15) Teorema (Principio della sovrapposizione degli effetti)** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $b_1, \dots, b_n : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue.*

*Allora un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = b_1(x) + \cdots + b_n(x)$ è dato da $y = y_1 + \cdots + y_n$, dove $y_k$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea $y'' + a_1\,y' + a_0\,y = b_k(x)$, per ogni $k = 1, \dots n$.*

*Dimostrazione.* Si ha che $y$ è derivabile due volte su $I$ in quanto somma di funzioni derivabili due volte su $I$ con

$$y' = y_1' + \cdots + y_n', \qquad y'' = y_1'' + \cdots + y_n''.$$

Sostituendo nel primo membro dell'equazione differenziale non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= (y_1'' + \cdots + y_n'') + a_1(y_1' + \cdots + y_n') + a_0(y_1 + \cdots + y_n) = \\ &= \underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{=b_1(x)} + \cdots + \underbrace{(y_n'' + a_1 y_n' + a_0 y_n)}_{=b_n(x)} = \\ &= b_1(x) + \cdots + b_n(x). \end{aligned}$$

Quindi $y$ è soluzione dell'equazione differenziale non omogenea $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b_1(x) + \cdots + b_n(x)$. ■

Questa proprietà sussiste anche quando $a_0$ e $a_1$ non sono funzioni costanti.

**(5.16) Teorema (di esistenza e unicità globale della soluzione del problema di Cauchy)** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $x_0 \in I$ e $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.*

*Allora esiste una e una sola soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

*definita su $I$.*

**(5.17) Esempio** Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee:

1) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$;

2) $y'' - 3y' + 2y = (x+2)e^{x}$;

3) $y'' - 2y' + y = e^{x}$;

4) $y'' + y = \sin x$.

Svolgimento

1) L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ è dato da $y = y_o + y_p$, dove $y_o$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 3y' + 2y = 0$ e $y_p$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Determiniamo inizialmente $y_o$. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni sono
$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è
$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Determiniamo un integrale particolare $y_p$ dell'equazione non omogenea. Consideriamo il termine forzante $b(x) = e^{3x}$. Si osserva che
$$b(x) = e^{3x} = 1 \cdot e^{3 \cdot x},$$
cioè è della forma $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$ con $P(x) = 1$, quindi un polinomio di grado zero, e $\alpha = 3$. Poichè $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$, quindi non è una soluzione dell'equazione caratteristica, si ha che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma
$$y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x},$$
dove $Q$ è un polinomio dello stesso grado di $P$. Quindi $Q$ è un polinomio di grado zero. Posto $Q(x) = A \in \mathbb{R}$, si ha quindi che $y_p$ è della forma
$$y_p(x) = Ae^{3x}.$$
Per determinare esplicitamente $y_p$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che
$$y_p'(x) = 3Ae^{3x}, \qquad y_p''(x) = 9Ae^{3x}.$$
Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene
$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x} \quad \Longrightarrow \quad 2Ae^{3x} = e^{3x} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$
Ne segue che $y_p(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea $y'' - 3y' + 2y = (x+2)e^x$ è dato da $y = y_o + y_p$, dove $y_o$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 3y' + 2y = 0$ e $y_p$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Determiniamo inizialmente $y_o$. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni sono
$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$
Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è
$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Determiniamo un integrale particolare $y_p$ dell'equazione non omogenea. Consideriamo il termine forzante $b(x) = (x+2)e^x$. Si osserva che
$$b(x) = (x+2)e^x = (x+2) \cdot e^{1 \cdot x},$$
cioè è della forma $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$ con $P(x) = x + 2$, quindi un polinomio di grado uno, e $\alpha = 1$. Poichè $\alpha$ è una soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità $m = 1$, si ha che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma
$$y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha x},$$
dove $Q$ è un polinomio dello stesso grado di $P$. Quindi $Q$ è un polinomio di grado uno. Posto $Q(x) = Ax + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$, si ha quindi che $y_p$ è della forma
$$y_p(x) = x(Ax+B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$
Per determinare esplicitamente $y_p$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che
$$y_p'(x) = [Ax^2 + (2A+B)x + B]e^x, \qquad y_p''(x) = [Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B]e^x.$$
Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene
$$[Ax^2+(4A+B)x+2A+2B]e^x - 3[Ax^2+(2A+B)x+B]e^x + 2(Ax^2+Bx)e^x = (x+2)e^x$$
$$\Longrightarrow \quad -2Ax + 2A - B = x + 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -3. \end{cases}$$
Ne segue che $y_p(x) = -\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)e^x$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è
$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea $y'' - 2y' + y = e^x$ è dato da $y = y_o + y_p$, dove $y_o$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 2y' + y = 0$ e $y_p$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Determiniamo inizialmente $y_o$. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ la cui soluzione è $\lambda = 1$ con molteplicità $m = 2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo un integrale particolare $y_p$ dell'equazione non omogenea. Consideriamo il termine forzante $b(x) = e^x$. Si osserva che

$$b(x) = e^x = 1 \cdot e^{1 \cdot x},$$

cioè è della forma $b(x) = P(x)e^{\alpha x}$ con $P(x) = 1$, quindi un polinomio di grado zero, e $\alpha = 1$. Poichè $\alpha$ è una soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità $m = 2$, si ha che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$y_p(x) = x^2 Q(x) e^{\alpha x},$$

dove $Q$ è un polinomio dello stesso grado di $P$. Quindi $Q$ è un polinomio di grado zero. Posto $Q(x) = A \in \mathbb{R}$, si ha quindi che $y_p$ è della forma

$$y_p(x) = Ax^2 e^x.$$

Per determinare esplicitamente $y_p$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che

$$y_p'(x) = A\left(x^2 + 2x\right)e^x, \qquad y_p''(x) = A\left(x^2 + 4x + 2\right)e^x.$$

Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$A\left(x^2 + 4x + 2\right)e^x - 2A\left(x^2 + 2x\right)e^x + Ax^2 e^x = e^x \quad \Longrightarrow \quad 2A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4) L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea $y'' + y = \sin x$ è dato da $y = y_o + y_p$, dove $y_o$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' + y = 0$ e $y_p$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Determiniamo inizialmente $y_o$. L'equazione

caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 1 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \pm i$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo un integrale particolare $y_p$ dell'equazione non omogenea. Consideriamo il termine forzante $b(x) = \sin x$. Si osserva che

$$b(x) = \sin x = e^{0 \cdot x}[0 \cdot \cos(1 \cdot x) + 1 \cdot \sin(1 \cdot x)],$$

cioè è della forma $b(x) = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x)$, con $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Poichè $\alpha \pm i\beta = \pm i$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica, si ha che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$y_p(x) = xe^{\alpha x}(P_1(x) \cos \beta x + Q_1(x) \sin \beta x),$$

dove $P_1$ e $Q_1$ sono due polinomi dello stesso grado del massimo dei gradi di $P$ e $Q$. Quindi $P_1$ e $Q_1$ sono due polinomi di grado zero. Posto $P_1(x) = A$, $Q_1(x) = B$, con $A, B \in \mathbb{R}$, si ha quindi che $y_p$ è della forma

$$y_p(x) = x(A \cos x + B \sin x).$$

Per determinare esplicitamente $y_p$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x), \\ y_p''(x) &= -2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x). \end{aligned}$$

Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$-2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x) + x(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

$$\Longrightarrow \quad -2A \sin x + 2B \cos x = \sin x \quad \Longrightarrow \quad (-2A - 1) \sin x + 2B \cos x = 0$$

essendo $\cos x$ e $\sin x$ linearmente indipendenti, per l'Esempio (5.7), si ha

$$\begin{cases} -2A - 1 = 0 \\ 2B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0. \end{cases}$$

Ne segue che $y_p(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$. Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**(5.18) Osservazione** Se si commette un errore nell'individuare la forma di un integrale particolare dell'equazione differenziale non omogenea, allora si giunge ad una equazione che non ha soluzioni per ogni $x \in I$. Infatti, supponiamo che nell'esempio 4) non ci si è accorti che $\pm i$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica. Allora un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Per determinare esplicitamente $y_p$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che

$$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x, \qquad y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$-A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = \sin x \quad \Longrightarrow \quad \sin x = 0$$

che non è risolta per ogni $x \in \mathbb{R}$ per alcun valore di $A, B \in \mathbb{R}$. Ne deduciamo che la forma dell'integrale particolare è errata.

**(5.19) Esempio** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x} + \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Poichè il termine forzante $b(x) = 3e^{2x} + \sin x$ è definito e continuo su $\mathbb{R}$, allora per il Teorema (5.16), il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita su $\mathbb{R}$. Per determinare questa soluzione calcoliamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione non omogenea.

L'integrale generale dell'equazione non omogenea $y''-6y'+8y = 3e^{2x}+\sin x$ è dato da $y = y_o+y_p$, dove $y_o$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''-6y'+8y = 0$ e $y_p$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea. Determiniamo inizialmente $y_o$. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 2, \\ 4. \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_o(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo un integrale particolare $y_p$ dell'equazione non omogenea. Consideriamo il termine forzante $b(x) = 3e^{2x} + \sin x$. Si osserva che $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$, con $b_1(x) = 3e^{2x}$ e $b_2(x) = \sin x$. Per il Teorema (5.15) si ha che $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, dove $y_{p_1}$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' - 6y' + 8y = b_1(x)$$

e $y_{p_2}$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' - 6y' + 8y = b_2(x).$$

Determiniamo inizialmente $y_{p_1}$. Si osserva che

$$b_1(x) = 3e^{2x} = 3 \cdot e^{2 \cdot x},$$

cioè è della forma $b_1(x) = P(x)e^{\alpha x}$ con $P(x) = 3$, quindi un polinomio di grado zero, e $\alpha = 2$. Poichè $\alpha = 2$ è una soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità $m = 1$, si ha che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$y_{p_1}(x) = xQ(x)e^{\alpha x},$$

dove $Q$ è un polinomio dello stesso grado di $P$. Quindi $Q$ è un polinomio di grado zero. Posto $Q(x) = A \in \mathbb{R}$, si ha quindi che $y_{p_1}$ è della forma

$$y_{p_1}(x) = Axe^{2x}.$$

Per determinare esplicitamente $y_{p_1}$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che

$$y'_{p_1}(x) = A(2x+1)e^{2x}, \qquad y''_{p_1}(x) = A(4x+4)e^{2x}.$$

Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$A(4x+4)e^{2x} - 6A(2x+1)e^{2x} + 8Axe^{2x} = 3e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad -2A = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{3}{2}.$$

Ne segue che $y_{p_1}(x) = -\frac{3}{2}xe^{2x}$.

Determiniamo ora $y_{p_2}$. Si osserva che

$$b_2(x) = \sin x = e^{0 \cdot x}[0 \cdot \cos(1 \cdot x) + 1 \cdot \sin(1 \cdot x)],$$

cioè è della forma $b(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, con $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Poichè $\alpha \pm i\beta = \pm i$ non sono soluzioni dell'equazione caratteristica, si ha che un integrale particolare dell'equazione non omogenea è della forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\sin\beta x),$$

dove $P_1$ e $Q_1$ sono due polinomi dello stesso grado del massimo dei gradi di $P$ e $Q$. Quindi $P_1$ e $Q_1$ sono due polinomi di grado zero. Posto $P_1(x) = A$, $Q_1(x) = B$, con $A, B \in \mathbb{R}$, si ha quindi che $y_{p_2}$ è della forma

$$y_{p_2}(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Per determinare esplicitamente $y_{p_2}$ sostituiamolo nell'equazione non omogenea. Si ha che

$$y'_{p_2}(x) = -A\sin x + B\cos x, \qquad y''_{p_2}(x) = -A\cos x - B\sin x.$$

Quindi sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$-A\cos x - B\sin x - 6(-A\sin x + B\cos x) + 8(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$(7A - 6B)\cos x + (6A + 7B)\sin x = \sin x$$

$$(7A - 6B)\cos x + (6A + 7B - 1)\sin x = 0$$

essendo $\cos x$ e $\sin x$ linearmente indipendenti, per l'Esempio (5.7), si ha

$$\begin{cases} 7A - 6B = 0 \\ 6A + 7B - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{6}{85} \\ B = \frac{7}{85}. \end{cases}$$

Ne segue che $y_{p_2}(x) = \frac{1}{85}(6\cos x + 7\sin x)$. Un integrale particolare dell'equazione non omogenea $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x} + \sin x$ è

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = -\frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{1}{85}(6\cos x + 7\sin x).$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{1}{85}(6\cos x + 7\sin x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali $y(0) =$ e $y'(0) = 0$. Osserviamo che

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} + 4c_2e^{4x} - \frac{3}{2}(2x + 1)e^{2x} + \frac{1}{85}(-6\sin x + 7\cos x).$$

Quindi

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{6}{85} = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 - \frac{3}{2} + \frac{7}{85} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = -\frac{289}{340} \\ c_2 = \frac{53}{68}. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{289}{340}e^{2x} + \frac{53}{68}e^{4x} - \frac{3}{2}(2x+1)e^{2x} + \frac{1}{85}(-6\sin x + 7\cos x).$$