Esercizi - Dicembre 2018

Esercizio 1. In $\mathbf{R}^3$ sono dati i vettori: $\mathbf{v}_1 = (1,0,1), \mathbf{v}_2 = (1.0,-1), \mathbf{v}_3 = (0,1,0), \mathbf{v}_4 = (1,0,0)\mathbf{v}_5 = (1,1,0), \mathbf{v}_6 = (1,1,1), \mathbf{v}_7 = (1,-1,0)\mathbf{v}_8 = (0,0,1)$.

(i) Si dimostri che $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_8) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_8)$.
(ii) Si calcoli la dimensione e si esibisca una base di $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_8)$.
(iii) Tra le terne $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6\}$, $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_7\}$, $\{\mathbf{v}_8, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$, $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ si indichi quale costituisce una base.
(iv) Si indichi quanti e quali tra i vettori $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8$ formano una base assieme a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{\leq 3}[T]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 si dimostri che i polinomi $p_1 = 1 - T, p_2 = 1 + T, p_3 = T^2 + 1, p_4 = T^3 - T^2 + T$ formano una base. Si scriva il polinomio $q = 1 + T + T^2 + T^3$ come combinazione lineare di essi.

Esercizio 3. In $\mathbf{R}^3$ si dimostri che le terne di vettori $A = \{\mathbf{v}_1 = (1,0,1), \mathbf{v}_2 = (0,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,0)\}$ e $B = \{\mathbf{w}_1 = (1,0,-1), \mathbf{w}_2 = (-1,0,-1), \mathbf{w}_3 = (0,1,0)\}$ sono due basi e si scrivano le due matrici del cambiamento di base da A a B e del cambiamento di base da B ad A.

Esercizio 4. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$V := \{a(1,1,2,1) + b(2,1,1,0) | a, b \in \mathbf{R}\} \qquad W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1 = x_2 + x_3,\ x_1 + x_4 = 0\}$$

(i) Si calcoli la dimensione di V e di W.
(ii) Si determinino equazioni per V e una base per W
(iii) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.
(iv) Si determini $h \in \mathbf{R}$ tale che $(3,1,1,h-1) \in V + W$.

Esercizio 5. In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0) \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,1,0) \quad \mathbf{v}_3 = (1,-1,0,0))$ e i sottospazi vettoriali:

$$V := L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \qquad W := \left\{\mathbf{v} = (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 | w = z - x = 0\right\}.$$

(i) Si determini una base di V e di W.
(ii) Si calcoli la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

Esercizio 6. Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbf{R}_{\leq 3}[T] \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

definita da

$$F(p) := (p(0), p(1), p(2))$$

Si dimostri che F é un' applicazione lineare.